



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA  
AVANZADA**

**“FILTRADO DIGITAL ADAPTIVO INTEGRADO”**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**Doctor en Tecnología Avanzada.**

**Presenta:** M. T. A. María Teresa Zagaceta Álvarez.

**Directores:** Dr. José de Jesús Medel Juárez  
Dr. Ernesto Marín Moarés

México D. F., Diciembre de 2009.



**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**  
**SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO**

SIP-14

*ACTA DE REVISIÓN DE TESIS*

En la Ciudad de México siendo las 5:00 horas del día 9 del mes de diciembre del 2009 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de titulada:

FILTRADO DIGITAL ADAPTIVO INTEGRADO

Presentada por el alumno:

Zagaceta Álvarez María Teresa

Apellido paterno

Apellido materno

Nombre(s)

Con registro:

A	0	7	0	4	4	5
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de:

Doctorado en Tecnología Avanzada

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **SU APROBACIÓN DE LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

**LA COMISIÓN REVISORA**

Directores de tesis

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Dr. Ernesto Marín Moares

Dr. Pedro Guevara López

Dr. José Antonio Calderón Arenas

Dr. Miguel Ángel Aguilar Frutis

**EL PRESIDENTE DEL COLEGIO**

Dr. José Antonio Irujo Díaz Góngora  
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO  
COLEGIO DE PROFESORES DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN  
DEL IPN



## CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la ciudad de México el día 1 de diciembre del año 2009 la que suscribe María Teresa Zagaceta Álvarez la alumna del Programa de Posgrado en Tecnología Avanzada con número de registro A070445 adscrito a CICATA LEGARIA manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de tesis bajo la dirección del Dr. José de Jesús Medel Juárez cede los derechos del trabajo intitulado "Filtrado Digital Adaptivo" al Instituto Politécnico Nacional para fines académicos y de investigación

Los usuarios de la información no podrán reproducir textualmente grafica y/o tabals del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Esto puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [mtza79@yahoo.com.mx](mailto:mtza79@yahoo.com.mx) si el permiso se otorga el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'María Teresa Zagaceta Álvarez', is positioned above a horizontal line.

MARIA TERESA ZAGACTE ALVAREZ

Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada

# RESUMEN

Esta tesis presenta el estudio de diversas técnicas de filtrado digital de señales para determinar cuál ofrece la mayor convergencia aplicada en sistemas lineales invariantes en el tiempo como, por ejemplo, el método de la parábola, el filtro de Kalman, el método de mínimos cuadrados y el de gradiente estocástico, usando en todos ellos a los modelos ARMA (1) (“autoregressive moving average”, modelos de primer orden estocásticos y descritos de manera recursiva).

Se enfatiza en el análisis de las técnicas de filtrado adaptivo, desarrollando algoritmos que permiten identificar y estimar parámetros de manera integrada dentro de un sistema visto como caja negra de tal forma que sea posible conceptualizar su nivel de convergencia y mejorar los algoritmos que actualmente se utilizan en esta importante área que interviene tanto en visión artificial, como en sistemas de control complejos en los que se requiere de la predicción, descripción y reconstrucción de información.

Los algoritmos presentados aquí se han desarrollado de manera analítica en base a la literatura citada y a las herramientas matemáticas necesarias, todos ellos simulados en Matlab.

# ABSTRACT

This thesis presents a study of various techniques of digital signal filtering to determine which provides greater convergence when applied to time-invariant linear systems such as the parabola method, the Kalman filter, the least squares and the stochastic gradient method, using in all of them the ARMA (1) models (autoregressive moving average "first-order stochastic model).

We have made emphasis in the analysis of adaptive filtering techniques to develop algorithms that allow us to identify and estimate parameters integrated within a system seen as a black box, in such a manner that it becomes possible to conceptualize their level of convergence and to improve algorithms that are currently used in this important area that is involved in both artificial vision and complex control systems, where information prediction, description and reconstruction are required.

The algorithms presented here have been developed in an analytical manner on the basis of cited literature and the necessary mathematical tools. All of them were simulated using MathLab.

## **AGRADECIMIENTOS**

A CONACYT por sustentar esta investigación.

A CICATA por darme la oportunidad de ser parte de ellos.

Al IPN por abrirme sus aulas durante 10 años y formar parte de mi vida.

Al Dr. José Antonio Calderón Arenas, Dr. Ernesto Marín Moares, Dr. Miguel Ángel Aguilar Frutis, Dr. Pedro Guevara López por contribuir en mi formación académica brindándome su tiempo, consejos y conocimiento durante esta investigación.

Al Dr. José de Jesús Medel por apoyarme, creer en mí, aconsejarme y motivarme contribuyendo así a mi crecimiento intelectual y personal.

# DEDICATORIAS

A Dios por caminar siempre a mi lado y mostrarme su bondad.

A Mon que me ha dado todo y me ha sacado adelante convirtiéndose en el pilar más grande en mi vida, por apoyarme en todos mis proyectos, por enseñarme a no darme por vencida, esforzarme y a ser constante para alcanzar mis metas.

A mi Mamá que ha dedicado su vida a cuidarme, aconsejarme y amarme, esforzándose en todo momento para darme lo mejor.

A Mía que ha sido una segunda madre, dándome su cariño y consejos para hacer de mi una mejor persona.

A mis tíos Miguel y Lili por tratarme como una hija, ustedes son ejemplo de superación, esfuerzo, y calidez humana, porque siempre han compartido todo conmigo, han estado a mi lado para apoyarme, aconsejarme, quererme y cuidarme, me han dado la oportunidad de tener lo mejor y de formar parte de su familia.

A mi tía Rosa por apoyarme, quererme, aconsejarme y ser ejemplo de constancia, dedicación, superación y enseñarme que todo se puede.

A mis hermanos Miguel y Jorge por estar siempre a mi lado porque hemos compartido momentos de alegrías, tristezas y disgustos sin dejar de cuidarnos y apoyarnos.

A Rosa y Claudia por sus consejos apoyo y cariño.

Al amor de mi vida Iván, por estar a mi lado siempre que lo he necesitado, porque me has dado amor, apoyo y comprensión, por creer en mí y por cambiar mi vida. Gracias a Claudia, Leonardo, Casandra y Susana que me han abierto las puertas de su casa brindándome su apoyo y cariño.

**Gracias a todos por formar parte de mi vida, cada uno de ustedes ha contribuido a mi formación personal y profesional.**

# ÍNDICE GENERAL

<b>GLOSARIO</b>	<b>I</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
Filtro Digital	1
Filtro Adaptivo	1
Técnicas de Filtrado	3
Planteamiento del Problema	3
Hipótesis	4
Justificación	4
Limites y Alcances	4
Discusión	5
Objetivo General	5
Objetivos específicos	6
<b>1 ESTADO DEL ARTE</b>	<b>7</b>
1.1 Algoritmos de Estimación	7
1.2 Algoritmos de Identificación a través del Filtro de Kalman	10
<b>2 RESULTADOS</b>	<b>14</b>
2.1 Metodología	14
2.2 Integración del Estimador e Identificador Recursivo	14
2.2.1 Etapa 1: Estimación de parámetros por el gradiente estocástico	18
2.2.2 Etapa 2: Estimación de parámetros en forma recursiva	19
2.2.3 Etapa 3: Identificación de Estados internos caso SISO	20
2.3 Estimación por el Método de la Parábola Recursivo	22
2.4 Productos Obtenidos	23
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>24</b>
<b>APORTACIONES</b>	<b>25</b>



<b>TRABAJO FUTURO</b>	<b>25</b>
<b>PRODUCTOS OBTENIDOS</b>	<b>26</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>27</b>
<b>ANEXO A</b>	<b>29</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Esquema de un filtro adaptivo	2
Figura 2	Representación del sistema de referencia	16
Figura 3	Diagrama de estados del sistema de referencia.	17
Figura4	Diagrama de la estructura global del filtro identificador, teniendo estimada la matriz de parámetros.	18
Figura 5	Simulación de la estimación para diferentes amplitudes de ruidos.	20
Figura 6	Estimación óptima en relación con el parámetro de referencia	21
Figura 7.	Identificación de los estados internos	21
Figura 8.	Funcional del error $J_k$ con un resultado menor al 0.01 de varianza de error	22
Figura 9	Convergencia resultante del estimador utilizando el método de la parábola.	23

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Símbolos usados en los diagramas a bloques	15
----------	--	----

# GLOSARIO

**Convolución:** Es un operador matemático que transforma dos funciones  $f$  y  $g$  en una tercera función que en cierto sentido representa la magnitud en la que se superponen,  $f$  y una versión trasladada e invertida de  $g$ .

**Descripción:** Es la operación de filtrado construida para conocer las condiciones presentes en relación a las áreas del filtrado respecto a el sistema.

**Estimación:** Es el área del filtrado dedicada a la descripción de los parámetros internos de del sistema a través de la información que emite como respuesta a un estímulo predefinido.

**Función de transferencia:** Es la convolución de una señal  $x(t)$  con los coeficientes internos del sistema para obtener la señal de salida  $y(t)$ .

**Identificación:** Es el área del filtrado dedicada a descripción de los estados internos del sistema a través de la información que emite como respuesta a un estímulo predefinido.

**Planta:** Dentro del control es el sistema físico a monitorear.

**Predicción:** Es la operación de filtrado construida para conocer las condiciones futuras en relación a las áreas del filtrado respecto del sistema.

**Reconstrucción:** Es la operación de filtrado construida para conocer las condiciones pasadas en relación a las áreas del filtrado respecto del sistema.

**Respuesta al impulso:** La respuesta a impulso o respuesta impulsiva de un sistema es la que se presenta en la salida frente a una señal muy breve, o impulso, en la entrada.

**Señal:** Es la descripción cuantitativa de un fenómeno físico, cuya información está contenida en un patrón de variaciones de acuerdo a un criterio previamente establecido.

**Señal continúa:** Una señal continua toma un valor determinado para cada  $t \in \mathfrak{R}$

**Señal discreta:** Una señal es discreta si su dominio son los números enteros y tendrá un valor para cada.

**Sistema:** Conjunto de partes o elementos organizadas y relacionadas que interactúan entre sí para lograr un objetivo. Los sistemas reciben información de entrada, energía o materia del ambiente y proveen información de salida, energía o materia.

# INTRODUCCIÓN

El Procesamiento Digital de señales se encarga del estudio, análisis y procesamiento de señales como audio, voz, imágenes y video. Los dispositivos que realizan esta tarea pueden ser de hardware físico, códigos de software especializado, o una combinación de ambos.

Cuándo las señales son transmitidas usando métodos analógicos, una cierta cantidad de “ruido” entra dentro de ella. Esto puede tener diferentes causas: información transmitida por radio puede tener una mala recepción, sufrir interferencias de otras fuentes de radio, o levantar ruidos de fondo del ambiente. Pulsos eléctricos que son enviados por cableados pueden ser atenuados por la resistencia de los mismos, y dispersados por su capacitancia, y variaciones de temperatura pueden acrecentar o disminuir estos efectos.

## **Filtro Digital**

En tales condiciones es necesario el empleo de filtros digitales ya que minimizan el ruido, describen, predicen o reconstruyen señales e información de sistemas, donde el objeto que se va a monitorear se le conoce como sistema de referencia. Un filtro digital es un sistema visto como una caja negra que, dependiendo de las variaciones de las señales de entrada en el tiempo y en amplitud, realiza un procesamiento matemático sobre ellas. Los filtros pueden ser una entidad de hardware o software con una función definida a través de la cual sigue a la señal en análisis.

## **Filtrado Adaptivo**

El término filtrado adaptivo implica que los parámetros que caracterizan al proceso o sistema, tales como ancho de banda y frecuencias, cambian con el tiempo; esto es, los coeficientes, también llamados pesos de las inferencias o modelos, cambian temporalmente.

La operación de un algoritmo de filtro adaptivo involucra dos procesos básicos:

- Proceso de filtrado, diseñado para producir una salida de acuerdo a un objetivo en específico, en respuesta a una secuencia de información de entrada.
- Proceso adaptivo, cuyo propósito es proveer un mecanismo de control que permita realizar los ajustes necesarios a la entrada o dentro del filtro para su sana operación, respecto de los cambios que sufre el sistema con su interacción en el medio ambiente en donde ella se encuentre interactuando.

La estructura de un filtro adaptivo se muestra en la figura 1, donde su entrada  $x[n]$ , es alterada por el error de identificación  $e[n]$ , la cual es el resultado de la diferencia de una señal deseada  $d[n]$  y la señal de salida  $y[n]$ . El criterio que se elige para que el filtro se adapte a una condición de evolución de la señal del sistema es elegido dentro de un grupo de condiciones permisibles. El filtro adaptivo depende para su operación de un algoritmo adaptivo.

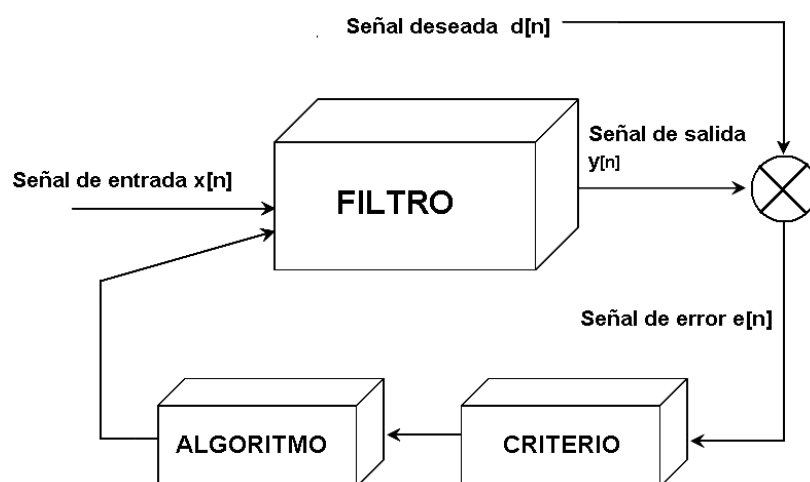


Figura 1. Esquema de un filtro adaptivo

El algoritmo es el procedimiento empleado para ajustar los coeficientes del filtro y así minimizar el error entre la señal deseada y la señal de salida, comenzando desde un conjunto de condiciones iniciales donde el conocimiento de las características relevantes de la señal no es indispensable, ya que después de sucesivas iteraciones el algoritmo converge a la solución óptima del filtro de Wiener. En un ambiente estacionario, el algoritmo ofrece el rastrear variaciones de tiempo acotadas en sus primeros cuatro momentos de probabilidad de la información de entrada a condición de que las variaciones entre ellos sean lo suficientemente lentas.

Actualmente se desarrollan y mejoran los algoritmos de filtrado adaptivo con dos procesos de forma separada como son:

- *Estimación*: Es el área del filtrado dedicada a la descripción de los parámetros<sup>1</sup> internos del sistema a través de la información que él emite como respuesta a un estímulo predefinido.
- *Identificación*: Es el área del filtrado dedicada a descripción de los estados<sup>2</sup> internos del sistema a través de la información que él emite como respuesta a un estímulo predefinido.

<sup>1</sup> Es la ganancia que permite incrementar positiva o negativamente los valores de las variables independientes que componen la operación del sistema

<sup>2</sup> Comúnmente se conoce como aquella variable independiente que hace que el sistema pueda pasar de una condición a otra en un tiempo específico.

## Técnicas de Filtrado

Los algoritmos más utilizados dentro del procesamiento de señales a lo largo de los últimos 30 años son:

*Mínimos cuadrados:* el método de mínimos cuadrados consiste en ajustar una recta a valores dispersos, se calculará la recta que pasa por la media de todas las observaciones representadas por un conjunto de valores. El método de mínimos cuadrados permite obtener una descripción en promedio respecto con el comportamiento de un sistema, tal que en el caso específico de la estimación de los parámetros del controlador considerado para un sistema dado, requiere que tenga un grado de convergencia respecto de la señal de referencia dada, y que en un sentido de probabilidad sea adecuado. [1]

*El filtro de Kalman:* es un algoritmo utilizado para poder identificar el estado oculto (no medible) de un sistema dinámico lineal, cuando el sistema está sometido a ruido blanco. Es una herramienta de software que analiza sistemas con parámetros variantes en el tiempo representado por modelos ARMA [2].

*Gradiente estocástico:* es un algoritmo que estima parámetros basado en información estadística que de manera óptima converge al filtro de Wiener [3].

Hasta ahora, en la teoría del filtrado, el proceso de identificación requiere conocer la matriz de transición para poder identificar el estado interno del sistema, lo que ha llevado a presuponer conocida dicha matriz. Pero ¿Cómo es posible conocer la matriz de transición si no se conoce a la matriz de parámetros?

El problema de presuponer conocida la matriz de transición radica en no poder predecir adecuadamente la dinámica del estado interno del sistema, debido a que la matriz de transición se encuentra descrita por el exponencial de los parámetros internos del sistema los cuales se desconocen.

## Planteamiento del Problema

¿Es posible describir la dinámica interna de un sistema visto como caja negra, si los principales métodos de identificación requieren de los parámetros que están dentro de ella?

¿Por qué presuponer conocida la matriz de transición si no son conocidos los parámetros internos de la caja negra?

Se utiliza en la identificación de estados internos de un sistema tipo caja negra a un filtro adaptivo que minimiza el error de convergencia por medio de un funcional de ganancias. Se considera que está disponible la matriz de transición del sistema ¿Cómo contar con esta matriz si de igual forma que los estados a identificar, son desconocidos al estar dentro de la caja negra? Lo que comúnmente se hace es considerar un matriz de transición invariante en el tiempo y que cumpla las condiciones de estabilidad de sistemas estacionarios; es

decir, para identificar los estados internos del sistema se conocen las ganancias internas que los afectan, así como sus entradas y salidas. Un ejemplo de este caso, es el filtro de Kalman el cual ajusta sus ganancias en cada iteración, considerando conocida la matriz de transición, y establecida como un valor fijo.

## Hipótesis

Es posible integrar en un algoritmo al estimador dentro del identificador para realizar la descripción de los estados internos del sistema de referencia tipo caja negra.

## Justificación

Las técnicas de filtrado digital en los últimos treinta años a partir de los avances en la industria de la electrónica, han considerado el uso de herramientas recursivas tales como: mínimos cuadrados, factor de olvido, gradiente estocástico, variable instrumental, entre otros. Desarrollados en sus principios para el seguimiento de trayectorias de diversos móviles así como de señales en sistemas de información; actualmente estas técnicas son aplicadas en economía, medicina, aeronáutica, navegación [30]; y en general de acuerdo al proceso que estén realizando se clasifican en:

1. Filtros estimadores
2. Filtros identificadores

En base a lo analizado en el estado del arte podemos decir que actualmente en el área de filtrado adaptivo todos los algoritmos [1-27] desarrollados por diferentes técnicas, persiguen el mismo objetivo: tener la máxima convergencia a una referencia, minimizando el error cuadrático medio  $e^2(k)$ , pero en ningún caso se menciona que para realizar la identificación es necesario conocer la matriz de parámetros y de esta manera poder conocer la matriz de transición<sup>3</sup>, ya que en cada algoritmo se presupone conocida la matriz de transición.

## Limites y Alcances.

Este trabajo se enfoca a:

- Modelos basados en sistemas vistos como caja negra donde solo se conocen su entrada y salida
- Sistemas lineales invariantes en el tiempo
- La construcción de los filtros estimadores a través del gradiente estocástico y esperanza matemática

---

<sup>3</sup> Es la matriz que define la transición de los estados desde un instante  $t_0$  hasta un instante  $t$

- La integración del filtro identificador en base a la estructura del filtro de Kalman con los métodos de estimación de mínimos cuadrados o gradiente estocástico.
- El proceso de adaptación es generado por el funcional del error, el proceso de innovación y el estimador
- El desarrollo de los algoritmos de estimación de primer y segundo orden, para el caso mono y multivariable.
- La simulación de los algoritmos de filtrado integrado usando Matlab 7.0
- El algoritmo no se implantara en sistemas reales
- La validación de los resultados es través del funcional del error, descrito por el segundo momento de probabilidad

## Discusión

La problemática a resolver en este trabajo, es no presuponer conocida la matriz de transición dentro de la identificación sino describirla por algún método que afecte al filtro digital de una manera adaptable.

¿Cómo lograr que un filtro tenga la máxima adaptabilidad considerando la descripción de la matriz de transición que afecte a la identificación en un solo proceso?

Considerando que la estimación se encarga de describir los parámetros internos de un sistema tipo caja negra a través de sus señales de salida y que la matriz de transición está en función de la matriz de parámetros ¿es posible considerar a la matriz de parámetros estimada dentro de la matriz de transición en vez de la matriz de parámetros real? Esto sería posible siempre y cuando se tuviera que la matriz de parámetros estimada convergiera a la matriz de parámetros reales, condición que se verificaría a través de la convergencia a una región predefinida del funcional del error, funcional que es generado por la diferencia entre el estado observable real y el modelo propuesto en donde se incluye a la estimación.

Si esto es posible entonces el filtro de estimación quedaría dentro del filtro de identificación, pero ahora ¿cuál es el error que el estimador usaría para garantizar que su funcional del error llega a la convergencia deseada? Sería el error generado por la diferencia entre la respuesta del identificador y la señal de referencia. Entonces ¿la respuesta del identificador afectaría al estimador? Si, generando así un filtro integrado y adaptivo.

## Objetivo General

El objetivo de esta investigación es desarrollar un algoritmo de filtrado integrado del tipo adaptivo formado por un estimador e identificador.

**Objetivos Específicos:**

- Construir un estimador de parámetros usando al gradiente estocástico para un sistema con modelo de referencia de primer orden expresado en forma recursiva.
- Construir un estimador de parámetros para un sistema de primer orden usando el segundo momento de probabilidad, expresado en diferencias finitas.
- Construir un estimador de parámetros para un sistema de orden superior expresado en diferencias finitas, usando el concepto de la parábola y el segundo momento de probabilidad.
- Construir el filtro integrado del tipo adaptivo por un estimador y un identificador.
- Medir el nivel de convergencia del filtro integrado con diferentes algoritmos de estimación adaptados al identificador.



# CAPITULO 1

## ESTADO DEL ARTE

---

Las técnicas de procesamiento de señales para el tratamiento de información proveniente de un sistema en evolución se remontan al siglo XIX, con el trabajo de Gauss para la predicción de orbitales con la primera formulación del método de mínimos cuadrados. Desde entonces las técnicas de descripción de trayectorias se han seguido desarrollando para eliminar los errores de medida de las variables del sistema o proceso en consideración, para llegar a conocer su evolución modelando su dinámica, establecer consideraciones probabilísticas de las observaciones procedentes del mismo y poder de esta forma llegar a la mejor estimación posible de las variables que determinan dicha evolución.

### 1.1 Algoritmos de Estimación de Parámetros

El método de mínimos cuadrados es uno de los pilares para el desarrollo del control adaptativo, ya que a través de su uso se realiza el ajuste de las ganancias del controlador del sistema, de acuerdo a un objetivo o modelo de referencia. Este mecanismo de descripción de las ganancias es llamado estimación de las ganancias del Sistemas. Lo que se intenta con el método es automatizar la obtención de las ganancias del subsistema controlador para realizar una retroalimentación lo más acorde posible al comportamiento real del sistema en un ambiente dado cambiante en el tiempo. Se requiere abordar la siguiente realidad de la interacción entre sistemas; es decir, los ruidos que perturban su interacción (emisor - receptor); de forma tal que la estimación requiere considerar estas condiciones para que el controlador de una respuesta adecuada tanto en tiempo como en forma.

El método de mínimos cuadrados permite obtener una descripción en promedio respecto del comportamiento de un sistema tal que en el caso específico de la estimación respecto de los coeficientes del controlador considerado para un sistema dado, requiera que tenga un grado de convergencia respecto con la referencia dada, y que en un sentido de probabilidad sea adecuado. Una propiedad importante es que al ser construido con el segundo momento de probabilidad, se puede expresar de forma recursiva cada uno de sus elementos con tan solo un elemento de retardo, permitiendo requerir menos recursos tanto de software como de hardware.

Desde la década de los sesentas el método de mínimos cuadrados ha sido utilizado en sistemas para eventos discretos, ya que permite la descripción del sistema en diferencias finitas al considerar un retardo de la señal emanada del sistema.

En [4] se presenta una técnica para disminuir la carga computacional requerida para el uso del método de la variable instrumental de forma recursiva. Cabe mencionar que este método de estimación es muy robusto, con un alto grado de convergencia, pero requiere de un gran número de iteraciones, requiriendo estar sobredimensionado en su diseño describiendo que el gradiente estocástico da una respuesta algorítmica similar a la de la variable instrumental pero con menos recursos de cómputo, como se describe por medio de simulaciones.

Tal es el caso presentado en [5], donde se muestra el desarrollo de un algoritmo para filtros digitales de respuesta finita al impulso (FIR, Finite Impulse Response) mediante la aproximación de mínimos cuadrados. Este método permite múltiples pasos, bandas suprimidas y bandas de transición arbitraria, todos con control explícito de los borde de banda, y es tan simple como usar el método de ventanas. Este método de diseño acumula una respuesta de frecuencia multibanda óptima mediante la adición y sustracción secuencial de filtros pasabajos óptimos con bandas de transición. Sin embargo, este método pondera con el error.

En [6] se presenta el análisis de una variante del algoritmo de mínimos cuadrados para reducir la complejidad de diseño para su implementación en filtros adaptativos digitales. Dicha variante consiste en cambiar la codificación del error en el algoritmo, ya que el error es un valor de tipo entero. Los resultados obtenidos en las pruebas realizadas en aplicaciones de filtros adaptativos tales como el predictor lineal e identificador de sistema, demuestran que la velocidad de convergencia aumenta. Esto permite que el algoritmo propuesto pueda ser aplicado en filtros adaptativos donde se requiere una velocidad de convergencia alta. Además, la modificación propuesta es compatible con los filtros adaptativos existentes debido a que la codificación del error se puede realizar por separado.

De acuerdo con [7], dentro del filtrado adaptativo, frecuentemente son propuestas nuevas estructuras y nuevos algoritmos que buscan acelerar la convergencia y/o reducen drásticamente la complejidad computacional, especialmente en aplicaciones que requieren el uso de un gran número de coeficientes de adaptación. En este sentido las estructuras de filtrado adaptativo en subbandas han crecido por la posibilidad de hacer el filtrado y la adaptación a una menor frecuencia de muestreo de la señal de entrada. Recientemente se han propuesto nuevas estructuras de adaptación subbanda capaces de modelar con precisión cualquier sistema de respuesta de impulsos finitos. Las propiedades de estas dos estructuras son investigadas: Mientras la primera consiste en un análisis de los datos y los filtros sin haber cambio en la tasa de muestreo de las señales, en la segunda las señales de salida se analizan a partir de la base de datos con sub-muestras. Se proponen procedimientos de optimización a fin de seleccionar los coeficientes de los bancos de filtros como resultado una reducción del error cuadrado medio.

En [8] se presenta un nuevo proceso de aplicación de filtros recursivos de IIR (respuesta al impulso infinito) condensador de conmutación programable. El uso de la estructura con el número de ceros mayor que el número de polos asegura una baja sensibilidad en la banda de paso mejor que los filtros elíptica que cumplan las mismas especificaciones. El uso de la conversión analógico / digital (CAD) permite la programación del filtro mediante el control de los condensadores de carga eliminando la necesidad de baterías.

En [9] se presenta un método para la estimación de la frecuencia en el sistema eléctrico mediante un filtro adaptativo basado en el método de mínimos cuadrados. En el análisis del sistema eléctrico se presentó un algoritmo de filtrado adaptativo. La simulación fue realizada en el software ATP (Alternative Transients Program). Esta utilización ha tenido como objetivo generar datos para las situaciones más graves y diferentes para la verificación y el análisis de la metodología propuesta. Los resultados fueron a las de un relé de comerciales para la validación, que muestra las ventajas del nuevo método.

De acuerdo con [10] se describe un algoritmo para calcular los parámetros de diseño de filtros digitales FIR interpolados (IFIR) con una complejidad baja (número pequeños de productos por muestra de salida). La función de interpolación se lleva a cabo mediante un filtro de suma en línea recursivo (RRS) moldeado, en donde la técnica de moldeo se aplica para mejorar las características en el dominio de frecuencia del filtro RRS. Dadas las especificaciones deseadas el filtro y un polinomio de moldeo, el algoritmo propuesto calcula el máximo factor de interpolación del filtro IFIR y además el número mínimo de etapas en cascada del filtro RRS de manera que la estructura completa satisfaga las especificaciones con la mínima complejidad.

En [11] se propone un algoritmo de filtrado adaptativo novel. El algoritmo explota la información dada por la densidad espectral de potencia de los ruido extraídos del periodograma y del error de filtrado. El objetivo es tratar de igualar las propiedades espectrales de los errores de filtrado con las propiedades espectrales de la medición del ruido. Los resultados de las simulaciones muestran que el algoritmo tiene excelentes propiedades de convergencia, con un número reducido de cambios. Esto podría ser explotado para obtener una menor carga computacional.

En [12] se presentan algunas aplicaciones del modelo autoregresivo y del algoritmo de Prony dentro del área de procesamiento digital de señales. Primeramente se presenta una descripción y un análisis de las estructuras de los modelos ARMA (p, q), AR (p) y MA (q) [13], se establecen las relaciones básicas entre las autocorrelaciones y los parámetros del modelo y se exponen algunos métodos para la obtención de los parámetros autoregresivos. Se presenta un análisis del algoritmo Prony en su concepto original así como el algoritmo de Prony por mínimos cuadrados para el caso amortiguado y no amortiguado. Después de exponer la teoría correspondiente al modelo autoregresivo y el algoritmo Prony, se presentan aplicaciones a: (1) identificación de sistemas invariantes en el tiempo, (2) interpolación estadística, (3) filtrado digital de alta resolución, (4) predicción temporal de muestras y (5) modelado de series temporales.

En [14] se utiliza la herramienta estadística de Cramer-Rao Bound (CRB) ya que a través de ella es posible expresar el límite inferior de la varianza para estimadores con parámetros deterministas así como la probabilidad de Gauss para estimar el máximo ruido de la señal muestreada. Se muestra que para ciertos valores del número de onda (frecuencia) las estimaciones en la señal son sensibles, mientras que para otros valores del número de onda de las estimaciones son insensibles. También está demostrado que para ciertos casos especiales es posible mejorar la estimación de la frecuencia estándar (hasta 3,6 dB), reflejando algunos de los ruidos (libre) la energía de la señal en una onda de propagación hacia atrás y la aplicación del estimador de máxima verosimilitud (MLE) de la señal medida nueva.

En [15] se considera que el diseño óptimo de un filtro de respuesta al impulso finito (FIR) con coeficientes, expresado en sumas de señal de dos potencias (SPT, signal powers-of two), ocurre cuando el pico de onda normalizado (NPR) es tomado como la medida del rendimiento. Este problema se formula como una mezcla de problemas de programación entera. Sobre la base de una transformación entre dos espacios diferentes integrales de la computación óptima escalando factores de coeficientes dados, esta programación integral necesita de un algoritmo eficiente, basado en una función discreta desarrollada para resolver este problema.

## 1.2 Algoritmos de Identificación a través del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman apareció a principios de la década de los sesenta; su impacto en el procesamiento de señales es comparable a los trabajos realizados por Nyquist [16] y Bode, en la década de los veinte, y a los de Wiener [17] en los años treinta. El filtro de Wiener está limitado a sistemas lineales, monovariantes, y estacionarios, mientras que el filtro de Kalman posibilita la estimación de sistemas multivariantes y no estacionarios. Además, aunque el filtro de Wiener puede ser discretizado, con la introducción de errores que ello comporta, el filtro de Kalman fue desarrollado directamente para sistemas muestreados, lo que permite de forma natural su implementación. Posteriormente el filtro de Kalman se amplió a sistemas continuos.

En [18] se pretende aportar una forma generalizada del filtro de Kalman a la estimación de modelos dinámicos lineales. El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que estima el estado no observable de un sistema dinámico dado con un conjunto de observaciones que proporcionan información a cerca de dicho instante en cada instante.

En [19] se comenta que el uso de técnicas estadísticas que adapten las salidas de los sistemas lineales para el que se predicen coeficientes permite crear sistemas de control adaptivos, permitiendo además corregir los errores sistemáticos inherentes en los sistemas. El filtro de Kalman permite una revisión rápida de ecuaciones y coeficientes a los constantes cambios del sistema.

Kalman se basa en el análisis de las diferencias entre las observaciones registradas en un instante y los parámetros del sistema en un punto de grid de sus proximidades, con el propósito de hacer un pronóstico de sus discrepancias, y así corregir el valor previsto por el sistema para que se ajuste más a las características deseadas.

En [20] se presenta una aportación generalizada del filtro de Kalman a la estimación de modelos dinámicos con expectativas racionales formadas en el presente de variables endógenas futuras. Se muestran dos aplicaciones de este procedimiento en modelos estocásticos de crecimiento bajo el supuesto de expectativas racionales. En particular se presenta una metodología para calibrar parámetros de estos modelos que resultan difíciles de estimar debido a la ausencia de datos reales. El procedimiento que se presenta tiene la ventaja de la sencillez de su funcionamiento. Por otro lado, se utiliza el procedimiento de calibración para dar una medida objetiva de discriminación entre modelos, que permita resolver el problema de identificación de modelos observables.

En [21] el uso de las redes neuronales en la identificación de sistemas ha sido utilizado y estudiado extensivamente, estableciendo la red neuronal retroalimentada como un modelo de función de transferencia y una red retroalimentada como un modelo en espacio de estados, esta última posee la desventaja de que en la mayoría de los casos no converge a los valores deseados, por lo que propone utilizar una red retroalimentada acoplada a un filtro de Kalman para la predicción y posterior identificación de un modelo lineal en espacio de estado, la propuesta es evaluada sobre un motor DC real.

En [22], se analizan filtros con características de fase lineal, considerándolos una clase de filtros FIR. Por otra parte, los filtros FIR simétricos permiten una aplicación eficaz. Aquí se extiende la definición clásica de la simetría en el sentido de Hermit a una simetría más general que también es aplicable a los filtros complejos. Esta simetría permite un tratamiento unificado de filtros pares e impares de longitud. Con este tipo de filtros se logra una reducción y los ahorros logrados en los costes de la aritmética. Los filtros simétricos con coeficientes de precisión finita, puede tener menores costos de la aritmética que el filtro hermítica-simétrica de la que se deriva.

En [23] se utiliza el filtro de Kalman para la autolocalización, que es el proceso mediante el cual un robot estima su posición respecto con un sistema de coordenadas fijo, es una de las capacidades básicas que debe poseer un robot móvil. Para auto-localizarse, un robot debe buscar referencias externas usando medios tales como sensores de ultrasonido, sensores laser cámaras de video, etc. Esta investigación se enfoca el problema de la autolocalización de robots móviles usando sensores de ultrasonido, sonares y el filtro de Kalman para fusionar los datos odométricos con los datos del sonar. Los ensayos realizados en un entorno de oficinas mostraron que el sistema de localización propuesto reduce significativamente la incertidumbre en la estimación de la posición del robot. Los errores totales obtenidos estuvieron por debajo de los 5 cm en cuanto a la estimación de las

coordenadas  $(xy)$  del centro del robot, mientras que el error en la estimación de la orientación angular del mismo estuvo por debajo de 1 grado.

En [24] la asimilación de datos es el proceso permanente de alimentar un modelo de predicción parcialmente desconocido con información disponible proveniente de observaciones con el objeto de corregir y mejorar los resultados modelados. Una de las herramientas matemáticas más significativas para realizar una asimilación es el filtro de Kalman. El filtro de Kalman es esencialmente un conjunto de ecuaciones de tipo predictor-corrector que es óptimo en el sentido que minimiza la traza de la matriz de covarianza de los errores. Existen diferentes versiones del filtro de Kalman que dependen del tipo de aplicación y la complejidad. Las versiones más comunes son: Extended Kalman Filter (EKF), Ensemble Kalman Filter (EnKF) y sus versiones de rango reducido. Estas últimas versiones cuentan con simplificaciones sobre el tamaño de las matrices que se utilizan para problemas de gran escala ( $10^6$ ). Estos filtros ya han sido aplicados a diferentes modelos, y en cada uno de los casos se ha notado que la mayor dificultad no proviene del algoritmo sino del código del modelo original, que debe tener cierta estructura para que el filtro pueda ser implementado. Esto ha provocado que los algoritmos de filtrado dependan estrechamente del modelo donde son aplicados, sin contar que también la versión del filtro depende de las variables que se pretende asimilar. En este trabajo se presentan filtros de Kalman adaptados a problemas de gran escala. Se desarrollan ejemplos de uso, problemas test, y comparaciones.

En [25] se plantea que la identificación de sistemas es una cuestión que presenta gran interés en los campos de la ingeniería y la econometría. Podemos definir la identificación de sistemas como el “arte” de encontrar modelos matemáticos simples capaces de representar un sistema a partir de observaciones ruidosas del mismo. Si el modelo no es identificable, para cualquier conjunto de observaciones dado existen múltiples combinaciones de valores de los parámetros igualmente compatibles con los datos. Muchos problemas del mundo real son abordados y conceptualizados como un “sistema” que ante unos determinados estímulos exteriores produce unas determinadas salidas en el tiempo. De este modo, la identificación de sistemas se convierte en una herramienta metodológica de la ciencia moderna, además de constituir una disciplina por sí misma. Si el valor de las salidas depende no sólo del valor actual de los estímulos, sino también de valores anteriores, se dice que el sistema es dinámico. A menudo, las salidas de sistemas dinámicos cuyos estímulos no son controlados, y posiblemente no son observados, se denominan series temporales. La cotización de una acción en bolsa, el nivel del agua cada día en un embalse o la longitud de las piezas cortadas por una máquina son ejemplos de series temporales.

La clase más importante de modelos dinámicos son los modelos lineales, tanto en la práctica como en la teoría. A menudo, estos modelos lineales permiten aproximaciones suficientemente precisas incluso cuando los procesos subyacentes no son lineales, utilizando transformaciones apropiadas de las variables en un rango de funcionamiento. La forma clásica de abordar el problema de identificación del sistema en este contexto es encontrar un filtro lineal tal que, al ser excitado por una entrada tipo ruido blanco,

proporcione una salida con las mismas características estadísticas que las de la serie observada.

La identificación de sistemas se ha desarrollado principalmente para procesos estacionarios, cuyas propiedades estadísticas son constantes en el tiempo. En un proceso estacionario, los efectos de un estímulo o perturbación transitoria (puntual) en la entrada del sistema sobre el nivel de salida del mismo se van reduciendo en el tiempo hasta desaparecer. Sin embargo, existen muchos procesos que pueden modelarse mejor mediante procesos no estacionarios, dado que las perturbaciones parecen tener efectos permanentes sobre el nivel de la serie.

En [26] se presenta un procedimiento para hacer robusto el algoritmo recursivo de Plackett-Kalman para el modelo lineal, incorporándole medidas diagnósticas que indiquen la influencia potencial y real de cada nueva observación en los parámetros del modelo. Se describe cómo calcular recursivamente el estadístico  $D^2$  de Cook, la distancia de Mahalanobis de cada nueva observación al centro de gravedad de las ya incluidas, y un contraste, basado en los residuos recursivos, de que la nueva observación es atípica. Se demuestra la simplicidad del cálculo secuencial de estas medidas y su fácil integración dentro del algoritmo recursivo del modelo de regresión lineal.

En [27] las señales de ruido pueden afectar en forma muy negativa a los sistemas de control automático. La aplicación de los filtros de Kalman en estos casos constituye una alternativa capaz de producir notables mejoras en su desempeño. Se desarrolla un ejemplo de aplicación del filtro de Kalman. La perturbación a la que está sujeto un sistema de control automático provoca que su salida se aleje del comportamiento ideal. Por ello, un buen diseño debe contemplar medidas que le permitan mantener un desempeño satisfactorio, incluso en la presencia de este tipo de señales, las cuales pueden considerarse de naturaleza determinística o aleatoria. El filtro de Kalman realiza un aporte monumental a la solución del problema de diseños de filtros óptimos, utilizando la técnica de espacio de estados.

# CAPITULO 2

## RESULTADOS

---

A continuación se muestra cómo fue posible lograr la integración del estimador e identificador en un solo proceso como algoritmo de adaptación para filtros digitales, logrando así cumplir con el objetivo de esta investigación.

### 2.1 Metodología

Para lograr el desarrollo del algoritmo de filtrado adaptivo integrado fue necesario:

- Realizar el estudio del estado del arte sobre las técnicas de filtrado tradicional, la construcción de sus algoritmos y su problemática de convergencia.
- Seleccionar un algoritmo de adaptación.
- Observar el grado de influencia de los ruidos en los parámetros
- Observar el grado de correlación entre los estados que guardan los parámetros
- Modificar el algoritmo considerando la estimación e identificación y minimizar el error de convergencia, de acuerdo con un criterio previamente establecido.
- Proponer el diseño y construcción del algoritmo integrado.

Cabe mencionar que en este trabajo solo se realizará la simulación de cada algoritmo en el programa MatLab 7.0, lo cual nos sirve para validar los resultados obtenidos.

### 2.2 Integración del Estimador e Identificador Recursivo

En primera instancia se desarrolló la integración del estimador e identificador usando un modelo de referencia de primer orden estocástico, invariante en el tiempo, descrito en diferencias finitas, en base al cual se construyeron ambas estructuras complementarias. A través del proceso de filtrado de manera complementaria se logran identificar los estados internos de ese modelo de referencia.





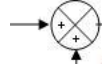

Se realizó la estimación de parámetros, conociendo tan solo la entrada y la salida del sistema de referencia y utilizando el método del gradiente estocástico se obtuvo el valor óptimo del parámetro del modelo propuesto. Este resultado se utilizó en el modelo de referencia para minimizar el funcional del error y así proceder a la identificación de la dinámica interna.

En el caso presente el modelo de referencia es comparado con la señal del identificador, para encontrar el funcional del error construido en base al segundo momento de probabilidad, que permite corregir al estimador y al propio identificador de manera dinámica, logrando que la interacción lleve al filtro a una región de convergencia y así llegar al valor de identificación deseado, sin poner por delante la intuición en la descripción de la matriz de transición.

La simbiosis entre estimador e identificador relacionados por el funcional del error, permite contar con un filtro digital dinámico e integrado, el cual es descrito a través de este trabajo para un sistema monovariante y estacionario, de acuerdo al siguiente orden: el estimador es del tipo gradiente estocástico teniendo acceso a la salida del sistema, el identificador es descrito por el filtro de Kalman, el funcional del error se expresa de manera recursiva y afecta a ambos filtros. Se presenta la simulación como un ejemplo ilustrativo, que a través de un modelo de referencia se logran observar las fronteras entre la estimación y la identificación, así como su interacción dinámica.

El filtro identificador es una estructura utilizada para predecir, describir o reconstruir el estado interno del sistema de referencia, considerando que su respuesta es estable (en el sentido más simple: entradas acotadas, salidas acotadas) a la excitación con ruido acotado. Se requiere el uso de simbología estándar (como puede verse en la tabla 1) estándar para describir por diagramas a bloques de sistemas discretos, las operaciones a realizarse, tanto por el sistema de referencia como por el filtro integrado.

Tabla 1. Símbolos usados en los diagramas a bloques.

	Señales de entrada o salida del sistema
	Retardo de la señal considerada y descrita como: $X_{k-1} = X_k z^{-1}$
	Sumador algebraico de señales
	Multiplicador algebraico de señales

A continuación se describe el sistema de referencia para el caso multivariable, por el proceso ARMA (1) de forma recursiva:  $y_k - CAC^+ y_{k-1} = CB_k v_{k-1} + Dw_k - CAC^+ Dw_{k-1}$ , como puede verse en la figura 2.

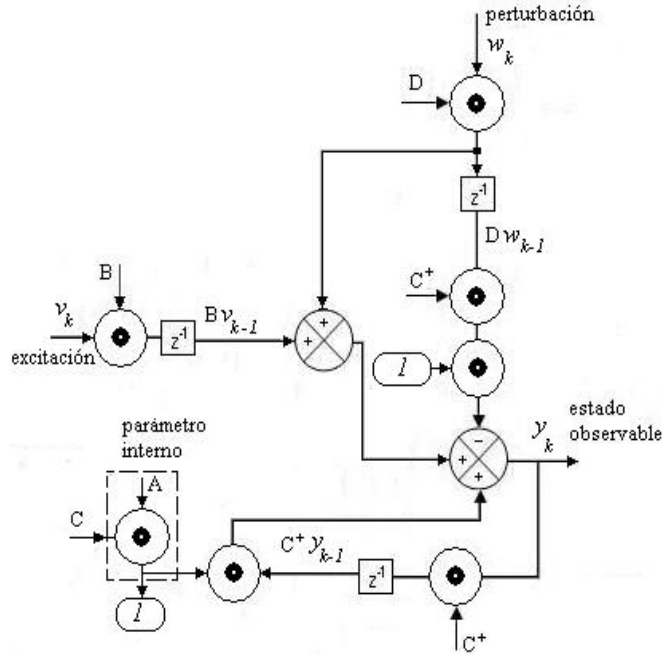


Figura 2. Representación del sistema de referencia

Considerando que el sistema es de primero orden y está dentro del espacio de estado, se tiene:  $x_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k$ ; cuya salida es descrita como  $y_k = C_k x_k + Dw_k$ , considerando las perturbaciones  $\{w(k), k \geq 0\}$  [28], por lo cual se considera un proceso estocástico discreto. Representado de forma simbólica como  $\{w_{k_i}, k_{i=0}=0, k_{i=1}=1, k_{i=2}=2, \dots\}$ . Tal que para cualquier conjunto arbitrario de puntos  $\{k_i\}$  se tiene la distribución asociada a la variable aleatoria  $w_{k_i}$ , con  $i=0, 1, 2, \dots$ , hasta  $n$  correspondiente a la variación normal; el proceso se considera Gaussiano, si para cualquier conjunto finito de puntos  $k_{i=0}=0, k_{i=1}=1, k_{i=2}=2, \dots, k_{i=n}=n$  y sus variables aleatorias correspondientes  $w_{k_i}$  son mutuamente excluyentes entonces  $w_k$ , es llamada una variable aleatoria, la cual tiene una distribución normal para todo  $k_i$ ; llamándose a este proceso, estocástico Gaussiano expresado como  $N(\mu = k_{w_k}, \sigma_{w_k}^2 < \infty)$ . De igual forma para  $\{v_k, k \geq 0\}$  es un proceso estocástico Gaussiano  $N(\mu = k_v, \sigma_w^2 < \infty)$ .

En el diagrama de la figura 3 se observa el espacio de estados del sistema de referencia ARMA (1), donde es posible apreciar las entradas y perturbaciones que lo afectan [29].

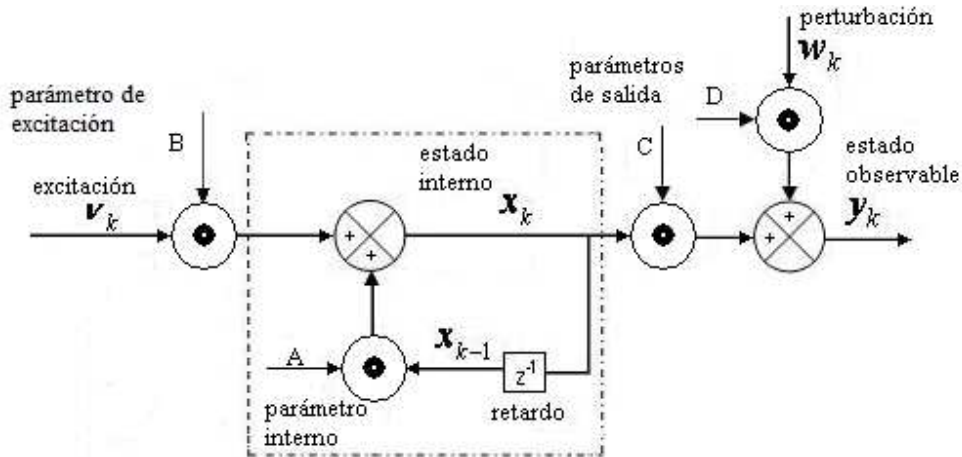


Figura 3. Diagrama de estados del sistema de referencia.

En la figura 3 se muestra la evolución de la señal dentro de un sistema visto como caja negra incluyendo las perturbaciones que lo alteran, tanto interna  $v_k$ , como externa  $w_k$ . De igual forma se observa que el parámetro  $A$  se encuentra dentro del sistema. Por lo que es necesario conocer dicho parámetro para poder describir la dinámica interna.

En la figura 3 y de acuerdo con la tabla 1, se muestra el modelo propuesto en este trabajo, en donde la salida del sistema de referencia y el sistema aproximado, se utilizan para conocer la ganancia  $K$  requerida por el filtro identificador y así describir el estado interno lo cual queda demostrado en los teoremas 1,2 y 3 del anexo A.

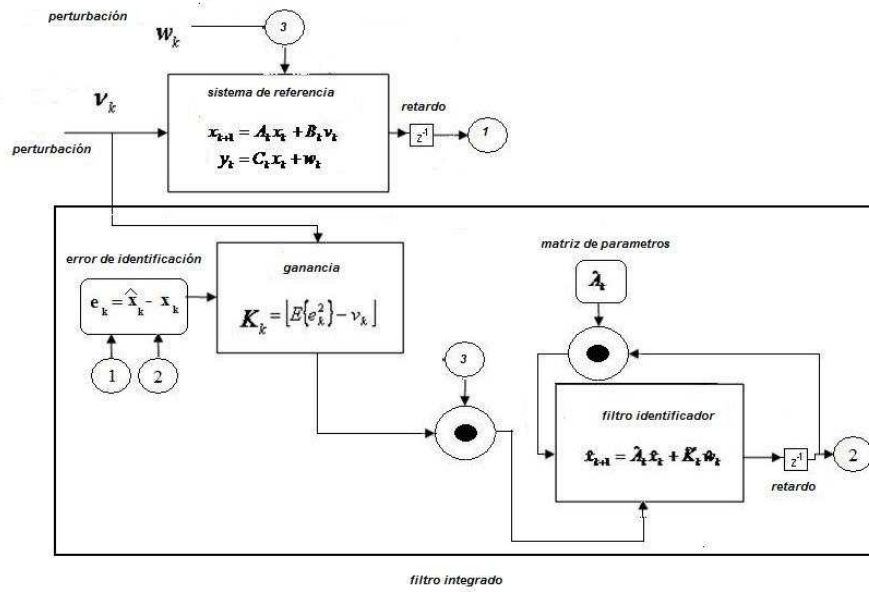


Figura 4. Diagrama de estados del sistema de referencia

Como puede observarse en la figura 4, el filtro de identificación, requiere conocida o estimada la matriz de parámetros internos del sistema.

A continuación se describe como se integran la estimación y la identificación implementada en el filtro.

### 2.2.1 Etapa 1: Estimación de parámetros por el gradiente estocástico

Se consideró un sistema descrito por el modelo estocástico de primer orden expresado en diferencias finitas como:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k; \quad y_k = C_k x_k + w_k. \quad (1.1)$$

Con un tiempo de evolución acotado  $\tau_k < \infty$  (por cada intervalo)<sup>4</sup>, que cumple con la condición de Nyquist [16]  $\tau_k = \frac{1}{2f_{\max k}}$ <sup>5</sup>. Acotado por  $N(\mu_w = k_w, \sigma_w^2 < \infty), k_w \in \mathfrak{R}_+$ ,

$N(\mu_v = k_v, \sigma_v^2 < \infty), k_v \in \mathfrak{R}_+$ , Cumpliendo con  $x_k, x_{k+1}, y_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times 1], k}$ ; así como con los parámetros  $A_k, B_k, C_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}$ .

<sup>4</sup> Donde su índice de evolución k, nos indica que de acuerdo con Nyquist el intervalo de tiempo en el que el sistema pasa de un estado a otro,

<sup>5</sup>  $f_{\max k}$  es la frecuencia representativa del sistema a considerarse y está acotada  $f_{\max k} < \infty$

Cuya respuesta se aproxima al comportamiento de un sistema ARMA (1). Fue posible encontrar su estimador descrito a través de la esperanza matemática utilizando la técnica del gradiente estocástico.

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\}(E\{y_{k-1}\hat{y}_{k-1}^T\})^{-1} \quad (1.2)$$

Considerando al funcional del error de manera recursiva de:

$$J_k = \frac{1}{k}(e_k e_k^T + (k-1)J_{k-1}). \quad (1.3)$$

con error de identificación:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k. \quad (1.4)$$

(Ver teorema 1 [Zagaceta, Medel] en Anexo A)

### 2.2.2 Etapa 2: Estimación de parámetros en forma recursiva

Considerando el modelo (1.2) y con las propiedades de invarianza, obtenemos su forma recursiva

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k. \quad (2.1)$$

Donde  $\hat{A}_k$  es descrita en (2.1).

(Ver teorema 2 [Zagaceta, Medel] en Anexo A)

De esta manera una vez que se obtiene la matriz de parámetros es posible realizar la identificación, ya que no se presupone conocida la matriz de transición; sino que ahora se encuentra estimada.

### 2.2.3 Etapa 3: Identificación de Estados internos caso SISO

Considerando el sistema descrito en (1.1)

Cuyo identificador es:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k. \quad (3.1)$$

Con:

$$K_k := \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}; \quad (3.2)$$

$$\hat{A}_k, C_k, J_k, R_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}$$

Este es un identificador óptimo, en el sentido de probabilidad, respecto del funcional del error, que tiene la forma:

$$J_{k+1, \min} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T, \quad Q_k := E\{v_k v_k^T\}, \quad R_k := E\{w_k w_k^T\}. \quad (3.3)$$

(Ver teorema 3 [Zagaceta, Medel] en Anexo A)

En base al modelo  $x_{k+1} = A_k x_k + B_k v$ ,  $y_k = C_k x_k + w_k$  se encontró el estimador  $\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}$  utilizado para la identificación del estado interno.

Se utilizó el estimador para graficar diferentes amplitudes desde 0.1 hasta 0.9 observando, que a una varianza de 0.6 el estimador tiene una mejor convergencia que el resto de las estimaciones realizadas.

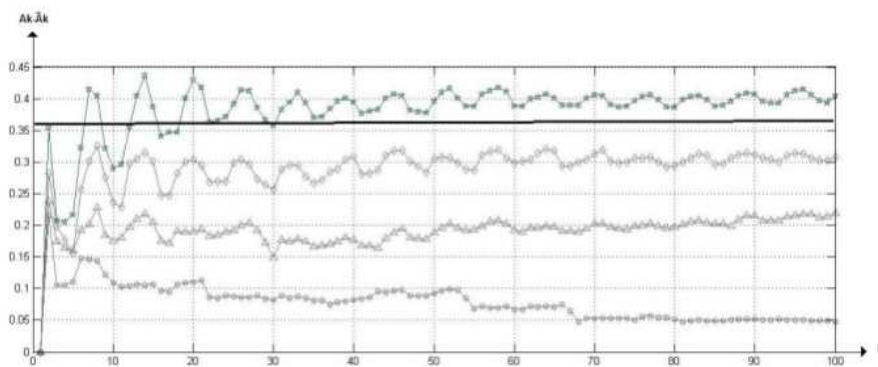


Figura 5 Simulación de la estimación para diferentes amplitudes de ruidos.

La estimación óptima fue para una varianza de ruido de 0.6 unidades, como puede verse en la figura 6.

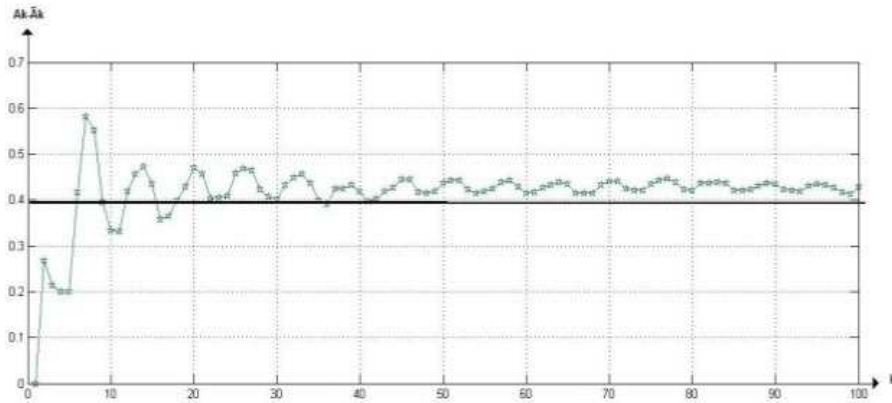


Figura 6. Estimación óptima en relación con el parámetro de referencia

Este resultado en línea de la estimación fue sustituido dentro de (2.1), considerando el desarrollo del algoritmo de acuerdo con la figura 4. Los resultados de la identificación requirieron de una matriz de ganancias descrita en (3.2), en la cual se observa el error de identificación por medio del segundo momento de probabilidad descrito en (3.3). Lo que permite obtener lo mostrado en la figura 7. Es decir, el proceso de adaptación se da cuando al usar la expresión del estimador descrita en (2.1) es usada en el modelo del identificador descrito en (3.1) al considerar que están interrelacionados con el funcional del error descrito en (3.3)

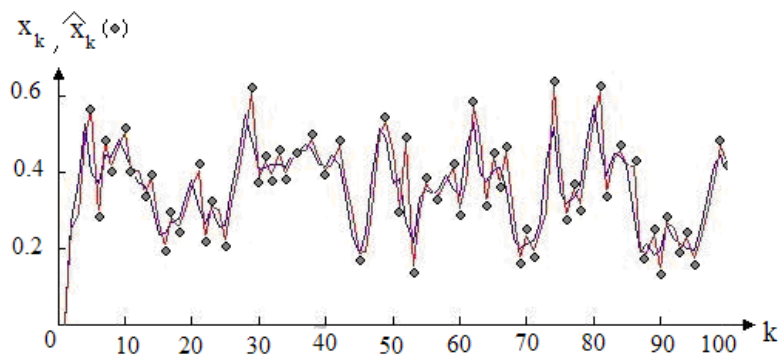


Figura 7. Identificación de los estados internos.

El funcional del error descrito en (3.3) a partir del error de identificación es graficado en la figura 8, observando inicialmente un aumento 0 a 0.3 siendo este su punto mas alto para despues descender hasta llegar a una condición estacionaria a partir de las 20 unidades en  $k$ , que corresponde a menos de 1%.

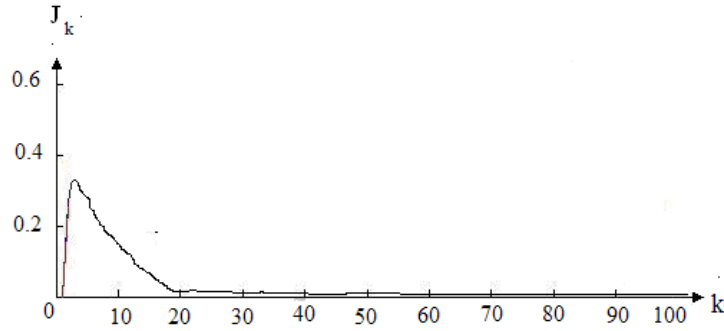


Figura 8. Funcional del error  $J_k$  con un resultado menor al 0.01 de varianza de error

### 2.3 Estimación por el Método Recursivo de la Parábola

Durante esta investigación se analizaron sistemas de segundo orden, logrando el desarrollo de un algoritmo de estimación de parámetros por el método de la parábola, el cual permite la aproximación a los parámetros reales teniendo un modelo matemático recursivo el cual converge con los resultados tradicionales.

Dado un  $X \times Y = \{(x_i, y_j) \mid i, j \in \mathbb{Z}_+, x_i, y_j \in \mathbb{R}, \}$  respecto de la parábola con perturbaciones, es posible encontrar los funcionales mínimos respecto de:

$$\sum y_i = an + b \sum x_i + \sum cx_i^2, \tag{4.1a}$$

$$\sum y_i x_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3, \tag{4.1b}$$

$$\sum y_i x_i^2 = a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 \tag{4.1c}$$

Se encontraron los parámetros de forma recursiva para la mejor identificación de la parábola de forma que:

$$\hat{a}_k = D_k - E_k - F_k + G_k - H_k + I_k + J_k + \beta_k \hat{a}_{k-1}. \tag{4.2a}$$



$$\hat{b}_k = L_k + M_k - N_k - O_k + P_k' + Q_k' - R_k' + S_k' - T_k' - U_k' + \delta_k \hat{b}_{k-1} \quad (4.2b)$$

$$\hat{c}_k = D_k'' + E_k'' - F_k'' - G_k'' + H_k'' - I_k'' - J_k'' + L_k'' + M_k'' - N_k'' + \varphi_k \hat{c}_{k-1} \quad (4.2c)$$

(Ver teorema 4 [Zagaceta, Medel] en Anexo A)

A continuación se muestra el grado de convergencia que se obtiene entre la señal observable y la señal estimada por el método de la parábola; es importante mencionar que este es un algoritmo desarrollado para sistemas de segundo orden.

La línea puntada en color rosa es la señal deseada y la línea en azul es la señal estimada del sistema, como puede verse en la figura 9 convergen en frecuencia y en amplitud, la señal observable del sistema tiene una amplitud de -1 a 1 mientras que la señal estimada se encuentra por arriba del 0.8, en frecuencia se observa casi la misma.

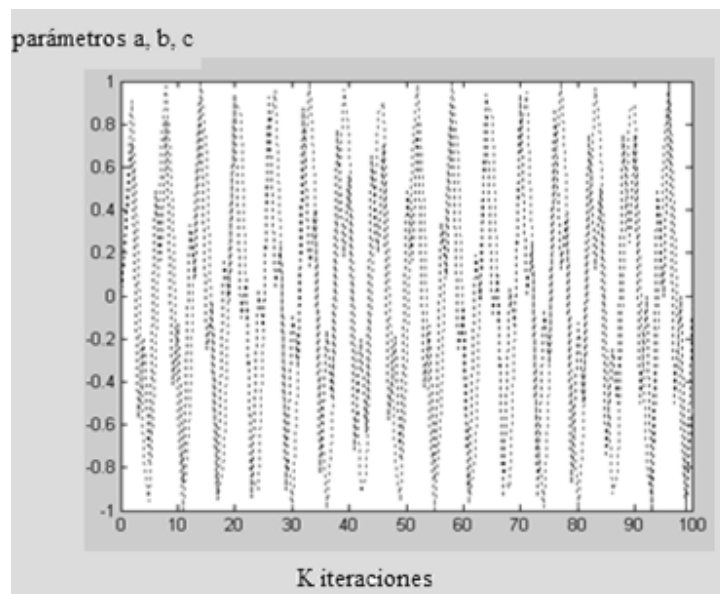


Figura 9. Convergencia resultante del estimador utilizando el método de la parábola.

## CONCLUSIONES

Este trabajo presenta un aporte a la teoría del filtrado ya que fue posible hacer la integración de un estimador e identificador en un solo filtro, basado en algoritmos tradicionales, logrando en primera instancia estimar la matriz de parámetros para así poder conocer la matriz de transición y proceder a la identificación todo esto en sistemas lineales invariantes vistos como caja negra.

Se logro desarrollar el filtro adaptivo formado por un estimador de parámetros unido con un identificador de estados, utilizando un modelo de referencia de primer orden estocástico, invariante en el tiempo, el cual fue descrito en diferencias finitas, con un tiempo de evolución entre estados acotado. La metodología propuesta dentro del proceso de filtrado consistió en tener una señal de referencia para realizar la estimación de la matriz de parámetros internos, con base en la cual se realizó la identificación del vector de los estados internos. La figura 3, nos permitió dar una descripción del algoritmo para ser implementado en simulación. La forma de realizar la prueba de integración de un estimador con un identificador, fue por medio de utilizar el modelo descrito de (1.1) con un solo parámetro.

El proceso de estimación fue probado para diferentes varianzas de ruidos, que iban desde 0.1 hasta 0.9, lo que nos permitió dado el modelo (1.1) para un parámetro de referencia de 0.4, seleccionar la mejor varianza de ruido, la que correspondió a la de 0.6.

Para la identificación se usó este último resultado y se logró la descripción del estado interno con un alto grado de similitud como puede observarse en la figura 6.

Observando así, que la integración del estimador- identificador como un filtro es una buena alternativa para conocer la dinámica interna de un sistema, sin la necesidad de presuponer conocida alguna de sus magnitudes; en vez de eso, se estiman e identifican para lograr una descripción lo más parecida posible a su funcionamiento en relación con su señal de respuesta del sistema de referencia.

El haber logrado y validado esto es de gran importancia ya que en los sistemas visto como caja negra solo se conocen las entradas y las salidas del sistemas y basados en esta información se logro hacer la identificación.

En esta investigación se mostraron dos técnicas clásicas para estimación de parámetros para sistemas lineales invariantes de primer orden usando como base teórica el gradiente estocástico del funcional del error, se desarrollaron dichos algoritmos para determinar el nivel de convergencia que ofrece cada una de estas técnicas. De manera ilustrativa se incluyeron los resultados de la implantación de estos algoritmos. Las ilustraciones son la prueba experimental de las expresiones teóricas, donde se observaron los niveles de convergencia, los cuales fueron acotados y que pueden considerarse aceptables ya que son del orden de las diez centésimas de acuerdo al funcional de error desarrollado.

Como parte de este trabajo se analizó un estimador de parámetros de segundo orden por el método de la parábola, lo que permite aproximar aun más los resultados del estimador de parámetros a los valores reales de la dinámica del sistema. El resultado arrojado fue una aproximación bastante buena, que no se había observado antes en la descripción de forma recursiva para sistemas de segundo orden pero la estructura matemática requerida para el algoritmo es muy compleja.

## **Aportaciones**

Este trabajo es un punto clave dentro de la teoría de filtrado digital, ya que hasta el momento, no se han desarrollado algoritmos integrados que permitan conocer la dinámica interna del sistema basados en el concepto de caja negra y a la vez estimar sus parámetros, todo este de forma recursiva. Este algoritmo puede ser aplicado a cualquier área del saber humano ya que se desarrolló de forma general.

El hecho de brindar en un solo algoritmo el proceso de estimación e identificación al funcional del error, al proceso de innovación y al estimador

## **Trabajo Futuro**

- Implementar el algoritmo de integración en un sistema real
- Patentar el desarrollo del algoritmo
- Desarrollar un estimador de parámetros general para sistemas de n-orden.
- Integrar un estimador de parámetros para sistemas de segundo orden por el método de la parábola con un identificador

# Productos Obtenidos

## Ponencias en Congresos

J.J. Medel, M.T. Zagaceta, “*Estimación usando la técnica del filtro de Kalman para sistemas monovariantes y estacionarios*”, 10° Congreso Nacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas del Instituto Politécnico Nacional, del 26 al 30 de Noviembre del 2007, México D. F., MEXICO.

P. Guevara-López, T. A. Ramírez-Romero, M. T. Zagaceta Álvarez. “*Modelado y reconstrucción de los datos estadísticos de un sistema de solicitud electrónica para gestión administrativa del IPN a través del filtro de Kalman*” 5° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas del IPN, del 10 al 14 Noviembre 2008 México D. F., MEXICO

## Publicaciones en Memorias Técnicas de Congreso

J.J. Medel, M.T. Zagaceta, “*Identificación de estados usando técnicas del Filtrado*”, Memorias del 3<sup>er</sup>. Congreso de Ingenierías Mecánica, Eléctrica, Electrónica y Mecatrónica de la Universidad Autónoma Metropolitana, del 25 al 27 de Junio de 2008, UAM Azcapotzalco, México D. F., MEXICO. ISBN 478-607-477-072-8

P. Guevara López, T. A. Ramírez Romero, J. Medel, M.T. Zagaceta, *Modeling and reconstruction of the statistical data from a system electronic application for administrative management in IPN through the filter of Kalman* 52<sup>nd</sup> IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS 2009) on August 2009, in Cancún, México. ISSN: 1548-3746 ISBN: 978-1-4244-4479-3

## Publicación en WSEAS Proceedings

J.J. Medel, M.T. Zagaceta, “*Identification first order stochastic system with estimation parameters: recursive description*” 8<sup>th</sup> WSEAS International Conference on signal processing, robotics and automation (ISPRA '09) University of Cambridge, Cambridge, UK, February, 2009. ISBN ~ ISSN:1790-5117 , 978-960-474-054-3

## Libros publicados

J.J. Medel Juárez, M. T. Zagaceta Álvarez, “*Introducción a la teoría de filtrado*” Instituto Politécnico Nacional (en impresión)

S. Alvarado Legaria, E. Guzmán Ramírez, J.J. Medel Juárez, P. Oleksiy, M. T. Zagaceta Álvarez, “*Técnicas de procesamiento de señales*” Instituto Politécnico Nacional (en impresión)

## REFERENCIAS

- [1] Gil S., Rodríguez E., *Física re-Creativa*, Prentice Hall, Buenos Aires 2001.
- [2] Manolakis DG., Ingle VK., Kogon SM., *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw Hill, 2000.
- [3] Medel Juárez J.J., *Análisis de dos Métodos de Estimación para Sistemas Lineales Estacionarios e Invariantes en el Tiempo con perturbaciones Correlacionadas con el Estado Observables del tipo una Entrada una Salida*, CIC IPN 2002
- [4] Alameda Hernández Enrique, Ruiz Padillo Diego P., Tienda Luna Isabel M., Carrión Pérez María, “*Un Nuevo Algoritmo tipo Gradiente Estocástico para Identificación Ciega de Canales*” Universidad de Granada, España 2001
- [5] Zavala Huavel E., González Segura L., *Diseño de Filtros FIR Mediante Mínimos Cuadrados*, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Lima Perú 2007
- [6] Velázquez J., Sánchez J.C, Avalos G., *Algoritmo de Mínimos Cuadrados con Error Codificado para Filtrado Adaptivo*, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Eléctrica, Información Tecnológica IPN 2008
- [7] Petraglia M R., Batalheiro P., *Projeto de Banco de Filtros para Estruturas Adaptativas em Subbandas*. Sba Controle & Automação 2007,
- [8] Monteiro J., Leme C., *Filtro Recursivo Analógico Digitalmente Programável por Controle de Carga*. Sba Controle & Automação 2007
- [9] Barbosa D., Monaro R., Coury D., Oleskovicz M., *Filtragem Adaptativa para a Estimação da Freqüência em Sistemas Elétricos de Potência*. Sba Controle & Automação 2008
- [10] Diaz Carmona J., Gordona Jovanovic D., Padilla Medina J., *An Algorithm for Computing Design Parameters of IFIR Filters with low Complexity*, CIC IPN 2007
- [11] Vega L., Tressens S., *Adaptive Filtering Using Projection onto Convex Sets*. *Lat. Am. Appl. Res.* 2007
- [12] Quiroz C., *Aplicaciones del Modelo Autoregresivo y del Modelo PRONY*, Centro de investigación y desarrollo de tecnología digital 2008
- [13] Oliphant, T.E.,, *On Parameter Estimates of the Lossy Wave Equation*, Signal Processing, IEEE Jan. 2008
- [14] Kozat, S.S., Singer, A.C., *Universal Switching Linear Least Squares Prediction*, Signal Processing, IEEE Feb. 2008

- [15] Zhi Guo Feng, Kok Lay Teo, *On A Discrete Filled Function Method for the Design of FIR Filters With Signed-Powers-of-Two Coefficients*, Signal Processing, IEEE Jan. 2008
- [16] H. Nyquist., *Certain topics in Telegraph Transmission Theory*, AIEE, Dan Lavry of Lavry Engineering, Inc. 1928
- [17] M. A. Peinado., *Filtro de Wiener Introducción y Formulación*, Universidad de Granada, España, 2003.
- [18] Ruiz Jesús *Una Nota Metodológica Acerca de Aplicaciones del Filtro de Kalman a las Calibraciones de los Modelos en Ciclo Real*, Investigaciones Económicas XXVI 2002
- [19] Del Pino Corredera Juan de Dios, *Aplicación de los Filtros de Kalman para el Pronóstico de Variables Meteorológicas en Superficie* GPV del CMT en Andalucía Occidental y Ceuta. INM 2000
- [20] Gupta, A., Joshi, S., *Variable Step-Size LMS Algorithm for Fractal Signals*, Signal Processing, IEEE April. 2008
- [22] Bruekers, F.; Kalker, T., *Reduction of Symmetric Complex Filters*, Signal Processing, IEEE Jan. 2009
- [23] Navarro García D., García Padilla F., *Auto-Localización de Robots Móviles Usando el Filtro de Kalman: Un Caso Basado en Hitos Puntuales Extraídos con un Sonar*, Signal Processing, IEEE April. 2009
- [24] <http://www.famaf.unc.edu.ar/novedades/spip.php?article435>
- [25] Izquierdo Millan S., *Análisis de Sistemas Integrados Mediante Métodos de Subespacio*, Universidad de Valladolid 2007
- [26] Peña Daniel, *On the Internal Robustification of the Plackett-Kalman Algorithm for Recursive Estimation of the Linear Regression Model*. Universidad Politécnica, Madrid 2007
- [27] Diaz G., Mejias A., Arteaga F., *Aplicación de los Filtros de Kalman a Sistemas de Control*. Universidad de Cordoba Venezuela 2007
- [28] U. Narayan Bhat, *Elements of Applied Stochastic Processes*, Computer Science, John Wiley & Sons, Inc, **1**, (1972) 7-17.
- [29] M. T. Zagaceta, J. J. Medel., *Identification First order Stochastic System with Estimation Parameters: Recursive Description*. Conf. on Signal Processing, & Robotics and Automation (University of Cambridge 2009).
- [30] Carayannis, G, Manolakis, D.G. Kalouptsidis, *A Fase Sequential Algorithm for Least Squares Filtering and Prediction*, IEEE, Signal Process July 1983.

# ANEXO A

## Integración del Estimador e Identificador Recursivo

**Teorema 1[Zagaceta, Medel]. (Estimación de parámetros por el gradiente estocástico).** Considerése que un sistema es descrito por el modelo estocástico de primer orden expresado en diferencias finitas:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k; \quad y_k = C_k x_k + w_k. \quad (1.1)$$

Su estimador usando la técnica del gradiente estocástico es descrito como:

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1} \hat{y}_k^T\} \left( E\{y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T\} \right)^{-1}. \quad (1.2)$$

**Prueba:** Considerése al funcional del error de manera recursiva de:

$$J_k = \frac{1}{k} (e_k e_k^T + (k-1) J_{k-1}). \quad (1.3)$$

Con error de identificación:

$$e_k = y_k - \hat{y}_k. \quad (1.4)$$

Y que al sustituir (1.1) en (1.3):

$$e_k = \tilde{A} y_{k-1} + \omega_k - \hat{y}_k. \quad (1.5)$$

Multiplicando por el transpuesto de  $e_k$  a (1.5)

$$e_k e_k^T = \tilde{A} y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T \tilde{A}^T + \omega_k \omega_k^T + y_k \hat{y}_k^T + 2(\tilde{A} y_{k-1} \omega_k^T - \tilde{A} y_{k-1} \hat{y}_k^T - \omega_k \hat{y}_k^T). \quad (1.6)$$

Y que al considerar en (1.5) a (1.3):

$$J_k = \frac{1}{k} (\tilde{A} y_{k-1} \hat{y}_{k-1}^T \tilde{A}^T + \omega_k \omega_k^T + y_k \hat{y}_k^T + 2(\tilde{A} y_{k-1} \omega_k^T - \tilde{A} y_{k-1} \hat{y}_k^T - \omega_k \hat{y}_k^T)) + (k-1) J_{k-1} \dots \quad (1.7)$$

Con el gradiente de (1.7), respecto de  $\tilde{A}$

$$\nabla J_k \Big|_{\tilde{A}_k} = (2 \tilde{A} y_{k-1} y_{k-1}^T + 2(y_{k-1} \omega_k^T - y_{k-1} \hat{y}_k^T)). \quad (1.8)$$

Quedando resumido en la igualdad:

$$(2\tilde{A}E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\} + 2(E\{y_{k-1}\omega_k^T\} - E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\})) = 0 \quad (1.9)$$

Y obteniendo:

$$\hat{A}_k = (E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\} - E\{y_{k-1}\omega_k^T\})(E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\})^{-1} \quad (1.10)$$

El estimador sin ruidos es:

$$\hat{A}_k = E\{y_{k-1}\hat{y}_k^T\}(E\{y_{k-1}y_{k-1}^T\})^{-1} \blacksquare. \quad (1.11)$$

**Teorema 2 [Zagaceta, Medel]. (Estimación de parámetros en forma recursiva).** Considerando el modelo (1.2) y con las propiedades de invarianza, obtenemos su forma recursiva

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k. \quad (2.1)$$

Donde  $\hat{A}_k$  es descrita en (2.1).

**Prueba:** Expresando (1.11) en forma discreta:

$$\hat{A}_k = \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1} \hat{y}_i^T \right] \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_{i-1} y_{i-1}^T \right]^{-1} \quad (2.2)$$

Expresando los términos de (2.2) en forma recursiva se obtiene:

$$P_k = \sum_{i=1}^k y_{i-1} \hat{y}_i^T, \quad P_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1} \hat{y}_i^T, \quad (2.3)$$

$$P_k = y_{k-1} \hat{y}_k^T + P_{k-1}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^k y_{i-1} y_{i-1}^T, \quad Q_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} y_{i-1} y_{i-1}^T, \quad (2.4)$$

$$Q_k = y_{k-1} y_{k-1}^T + Q_{k-1}$$



La matriz de parámetros es expresado de forma recursiva como:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1} \hat{y}_k^T + (k-1) P_{k-1}] Q_k^{-1} \quad (2.5)$$

Desarrollando (2.5) se obtiene:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1} \hat{y}_k^T + (k-1) (P_{k-1} Q_{k-1}^{-1}) Q_{k-1}] Q_k^{-1} \quad (2.6)$$

Sustituyendo  $[P_{k-1} Q_{k-1}^{-1}]$  por  $\hat{A}_{k-1}$  se obtiene:

$$\hat{A}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1} \hat{y}_k^T + (k-1) \hat{A}_{k-1} Q_{k-1}] Q_k^{-1} \quad (2.7)$$

Separando términos:

$$\hat{A}_k = [(k-1) Q_{k-1} Q_k^{-1}] \hat{A}_{k-1} + \frac{1}{k} [y_{k-1} \hat{y}_k^T Q_k^{-1}] \quad (2.8)$$

Igualando  $M_k = [(k-1) Q_{k-1} Q_k^{-1}]$ , y  $\tilde{Q}_k = \frac{1}{k} [y_{k-1} \hat{y}_k^T Q_k^{-1}]$ :

$$\hat{A}_k = M_k \hat{A}_{k-1} + \tilde{Q}_k \blacksquare. \quad (2.9)$$

De esta manera una vez que se obtiene la matriz de parámetros es posible realizar la identificación, ya que no se presupone conocida la matriz de transición; sino ahora se encuentra estimada.

**Teorema 3 [Zagaceta, Medel] (Identificación de estados internos caso una entrada una salida):** Considerando el sistema descrito en (1.1)

Cuyo identificador es:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k. \quad (3.1)$$

Con:

$$K_k := \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1} \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}; \quad (3.2)$$

$$\hat{A}_k, C_k, J_k, R_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times n], k}$$

Es un identificador óptimo en el sentido de probabilidad, respecto del funcional del error que tiene la forma:

$$J_{k+1, \min} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T, \quad Q_k := E\{v_k v_k^T\}, \quad R_k := E\{w_k w_k^T\}. \quad (3.3)$$

**Prueba:** Considérese que el error de identificación es:

$$e_k := x_k - \hat{x}_k; \quad e_k \in \mathfrak{R}_+^{[n \times 1], k}, \quad \{e_k\} \subseteq N(\mu_{e_k} = k_{e_k}, \sigma_{\hat{w}_k}^2 < \infty), \quad k_{e_k} \in \mathfrak{R}_+; \quad (3.4)$$

Donde su funcional de error y varianzas de los ruidos:

$$J_k := E\{e_k e_k^T\}, \quad R_k := E\{w_k w_k^T\}, \quad Q_k := E\{v_k v_k^T\}. \quad (3.5)$$

En relación con (3.4), desplazado un tiempo, son sustituidos sus estados considerando la definición expresada en (2.1) respecto con (1.1):

$$e_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k \hat{w}_k). \quad (3.6)$$

El ruido en el identificador convergen en casi todos los puntos al ruido que afecta al sistema; de forma tal  $\lim_{i \rightarrow k} \hat{w}_i \xrightarrow{c.p.} w_k$  y el proceso de innovación descrito como:

$$\hat{w}_k := y_k - C_k \hat{x}_k. \quad (3.7)$$

Al sustituir (3.7) en (3.6), se obtiene:

$$e_{k+1} = A_k x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k \hat{x}_k + \tilde{K}_k (y_k - C_k \hat{x}_k)) \quad (3.8)$$

La señal observable  $y_k$  de (3.8), de acuerdo con (3.2) y agrupando respecto con  $x_k$ ,  $\hat{x}_k$ , y a  $\tilde{K}_k$ ,:

$$e_{k+1} = (A_k - \tilde{K}_k C_k) x_k + B_k v_k - (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) \hat{x}_k - \tilde{K}_k w_k. \quad (3.9)$$

Cabe mencionar que el conjunto de valores propios cumple  $\{\lambda_i(\hat{A}_k)\}_k \subseteq ([0,1), k)$ , que son las condiciones de estabilidad desde un punto de vista robusto para sistemas discretos variantes [11].

Considerando la expresión (3.9), respecto con  $(\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k)$ , como factor común entre  $x_k$  y  $\hat{x}_k$

$$e_{k+1} = (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) (x_k - \hat{x}_k) + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k. \quad (3.10)$$

Que al sustituir (3.4) en (3.10):

$$e_{k+1} = (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) e_k + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k. \quad (3.11)$$

Con

$$\hat{A}_k := (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k). \quad (3.12)$$

Sustituyendo (3.11) en (3.12) se obtiene

$$e_{k+1} = \hat{A}_k e_k + B_k v_k - \tilde{K}_k w_k. \quad (3.13)$$

De acuerdo con (3.5), la varianza del ruido en  $(k+1)$ :

$$J_{k+1} = E\{e_{k+1} e_{k+1}^T\} \quad (3.14)$$

Sustituyendo en (3.13) a (3.14), es requerido realizar el producto interno y considerando las propiedades de la esperanza matemática:

$$\begin{aligned} & \hat{A}_k E\{e_k e_k^T\} \hat{A}_k^T + \hat{A}_k E\{e_k v_k^T\} B_k^T - \hat{A}_k E\{e_k w_k^T\} \tilde{K}_k^T \\ & + B_k E\{v_k e_k^T\} \hat{A}_k^T + B_k E\{v_k v_k^T\} B_k^T - B_k E\{v_k w_k^T\} \tilde{K}_k^T \\ & - \tilde{K}_k E\{w_k e_k^T\} \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k E\{w_k v_k^T\} B_k^T + \tilde{K}_k E\{w_k w_k^T\} \tilde{K}_k^T \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con ruidos independientes y varianzas descritas en (3.5), la expresión (3.15), se reduce a la forma:

$$J_{k+1} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \quad (3.16)$$

Abriendo la descripción de (3.12) en (3.16)

$$J_{k+1} = (\hat{A}_k - \tilde{K}_k C_k) J_k (\hat{A}_k^T - C_k^T \tilde{K}_k^T) + B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \quad (3.17)$$

Desarrollando (3.17):

$$\begin{aligned} J_{k+1} &= \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T - \hat{A}_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T \\ &+ \tilde{K}_k C_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T + B_k Q_k B_k^T + \tilde{K}_k R_k \tilde{K}_k^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

El gradiente estocástico  $\nabla J_{k+1|K_k}$  para (4.38) tiene la forma  $\frac{\partial J_{k+1}}{\partial \tilde{K}_k} = 0$ , y considerando que las matrices son simétricas  $\tilde{K}_k = \tilde{K}_k^T$ ,  $\hat{A}_k J_k C_k^T = C_k J_k \hat{A}_k^T$ ,  $\tilde{K}_k R_k = R_k^T \tilde{K}_k^T$ ; y que al reorganizar con respecto con  $\tilde{K}_k$ :

$$\nabla J_{k+1|K_k} = -\hat{A}_k J_k C_k^T + \tilde{K}_k [C_k J_k C_k^T + R_k] \quad (3.19)$$

De (3.19) al ser un mínimo,  $\tilde{K}_k$ , tiene la forma:

$$\tilde{K}_k = \hat{A}_k J_k C_k^T [C_k J_k C_k^T + R_k]^{-1}; \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.20) y su transpuesta en (3.18)

$$J_{k+1} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T. \quad (3.21)$$

Y dado que  $\hat{A}_k J_k C_k^T$  de acuerdo con (3.20), es descrito como:

$$\hat{A}_k J_k C_k^T = K_k (C_k J_k C_k^T + R_k). \quad (3.22)$$

Se observa que

$$\hat{A}_k J_k C_k^T \tilde{K}_k^T = \tilde{K}_k (C_k J_k C_k^T + R_k) \tilde{K}_k^T. \quad (3.23)$$

Reduciéndose (3.21) de acuerdo con (3.22) y (3.23), se obtiene (3.3) como puede verse

$$J_{k+1} = \hat{A}_k J_k \hat{A}_k^T - \tilde{K}_k C_k J_k \hat{A}_k^T + B_k Q_k B_k^T. \blacksquare \quad (3.24)$$

### Estimación por el Método de la Parábola.

**Teorema 4 [Zagaceta, Medel].** Dado el sistema de la forma

$$\sum y_i = an + b \sum x_i + \sum cx_i^2 \quad (4.1a)$$

$$\sum y_i x_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 + c \sum x_i^3 \quad (4.1b)$$

$$\sum y_i x_i^2 = a \sum x_i^2 + b \sum x_i^3 + c \sum x_i^4 \quad (4.1c)$$

Es posible encontrar los parámetros de forma recursiva para la mejor identificación de la parábola de forma que:

$$\hat{a}_k = D_k - E_k - F_k + G_k - H_k + I_k + J_k + \beta_k \hat{a}_{k-1}. \quad (4.2a)$$

$$\hat{b}_k = L_k + M_k - N_k - O_k + P_k' + Q_k' - R_k' + S_k' - T_k' - U_k' + \delta_k \hat{b}_{k-1} \quad (4.2b)$$

$$\hat{c}_k = D_k'' + E_k'' - F_k'' - G_k'' + H_k'' - I_k'' - J_k'' + L_k'' + M_k'' - N_k'' + \varphi_k \hat{c}_{k-1} \quad (4.2c)$$

**Prueba:** De acuerdo con (4.1a), (4.1b) y (4.1c) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} k & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Se desea encontrar el vector  $M$ , que es descrito por (4.3) de la forma:

$$[M] = [A_k]^{-1} [Y]. \quad (4.4)$$

Requiriendo que el  $\det(A) \neq 0$ , ya que:

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}. \quad (4.5)$$

Y que al considerar en (4.4) los parámetros de (4.3), se tiene:

$$[A_k]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (\sum x_i^3)^2 - \sum x_i^2 \sum x_i^4 & (\sum x_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^3) & (\sum x_i^2)^2 - \sum x_i \sum x_i^3 \\ (\sum x_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^3) & -(n \sum x_i^4 - (\sum x_i^2)^2) & (n \sum x_i^3 - \sum x_i \sum x_i^2) \\ (\sum x_i^2)^2 - \sum x_i \sum x_i^3 & (n \sum x_i^3 - \sum x_i \sum x_i^2) & -(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2) \end{bmatrix}}{\sum x_i^4 (\sum x_i)^2 - 2 \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 + (\sum x_i^2)^3 - n \sum x_i^4 \sum x_i^2 + n (\sum x_i^3)^2} \quad (4.6)$$

Ya que de acuerdo con (4.4) y respecto a (4.6), se tiene que los parámetros están descritos en forma simplificada:

$$a_k = \frac{((\sum x_i^3)^2 + \sum x_i^2 \sum x_i^4) \sum y_i + ((\sum x_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^3)) \sum y_i x_i + ((\sum x_i^2)^2 - \sum x_i \sum x_i^3) \sum y_i x_i^2}{\sum x_i^4 (\sum x_i)^2 - 2 \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 + (\sum x_i^2)^3 - n \sum x_i^4 \sum x_i^2 + n (\sum x_i^3)^2} \quad (4.7a)$$

$$b_k = \frac{((\sum x_i \sum x_i^4 - \sum x_i^2 \sum x_i^3)) \sum y_i + ((\sum x_i^2)^2 - n \sum x_i^4) \sum y_i x_i + ((n \sum x_i^3 - \sum x_i \sum x_i^2)) \sum y_i x_i^2}{\sum x_i^4 (\sum x_i)^2 - 2 \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 + (\sum x_i^2)^3 - n \sum x_i^4 \sum x_i^2 + n (\sum x_i^3)^2} \quad (4.7b)$$

$$c_k = \frac{((\sum x_i^2)^2 - (\sum x_i \sum x_i^3)) \sum y_i + ((n \sum x_i^3 - \sum x_i \sum x_i^2)) \sum y_i x_i + ((\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2) \sum y_i x_i^2}{\sum x_i^4 (\sum x_i)^2 - 2 \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_i^3 + (\sum x_i^2)^3 - n \sum x_i^4 \sum x_i^2 + n (\sum x_i^3)^2} \quad (4.7c)$$

Reescribiendo al conjunto de sumatorias contenidas en (4.7a), (4.7b), (4.7c) y considerando que es un proceso estacionario, se tiene:

$$a_k = \frac{((T_k)^2 + Q_k U_k) P_k + ((S_k U_k - Q_k T_k)) R_k + ((Q_k)^2 - S_k T_k) W_k}{U_k (S_k)^2 - 2 S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k (T_k)^2} \quad (4.8a)$$

$$b_k = \frac{((S_k U_k - Q_k T_k)) P_k + ((Q_k)^2 - k U_k) R_k + ((k T_k - S_k Q_k)) W_k}{U_k (S_k)^2 - 2 S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k (T_k)^2} \quad (4.8b)$$

$$c_k = \frac{((Q_k)^2 - (S_k T_k)) P_k + ((k T_k - S_k Q_k)) R_k + ((S_k)^2 - (k Q_k)) W_k}{U_k (S_k)^2 - 2 S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k (T_k)^2} \quad (4.8c)$$

Para cada literal se tiene que

$$P_k = \frac{1}{k} [y_k + (k-1)P_{k-1}] \quad (4.9)$$

$$Q_k = \frac{1}{k} [x_k^2 + (k-1)Q_{k-1}] \quad (4.10)$$

$$R_k = \frac{1}{k} [y_k x_k + (k-1)R_{k-1}] \quad (4.11)$$

$$S_k = \frac{1}{k} [x_k + (k-1)S_{k-1}] \quad (4.12)$$

$$T_k = \frac{1}{k} [x_k^3 + (k-1)T_{k-1}] \quad (4.13)$$

$$U_k = \frac{1}{k} [x_k^4 + (k-1)U_{k-1}] \quad (4.14)$$

$$W_k = \frac{1}{k} [y_k x_k^2 + (k-1)W_{k-1}] \quad (4.15)$$

Separando el numerador de (4.8a) y sustituyendo en forma recursiva sus términos considerando  $(k-1) = a$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{k(NUM)} = & \left[ \left( \frac{1}{k} [x_k^3 + (k-1)T_{k-1}] \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{1}{k} [x_k^2 + (k-1)Q_{k-1}] \right) \left( \frac{1}{k} [x_k^4 + (k-1)U_{k-1}] \right) \right] \left( \frac{1}{k} [y_k + (k-1)P_{k-1}] \right) \\ & + \left[ \left( \frac{1}{k} [x_k + (k-1)S_{k-1}] \right) \left( \frac{1}{k} [x_k^4 + (k-1)U_{k-1}] \right) \right] \left( \frac{1}{k} [y_k x_k + (k-1)R_{k-1}] \right) \\ & - \left[ \left( \frac{1}{k} [x_k^2 + (k-1)Q_{k-1}] \right) \left( \frac{1}{k} [x_k^3 + (k-1)T_{k-1}] \right) \right] \left( \frac{1}{k} [y_k x_k^2 + (k-1)W_{k-1}] \right) \\ & + \left[ \left( \frac{1}{k} [x_k^2 + (k-1)Q_{k-1}] \right) \right. \\ & \left. - \left( \frac{1}{k} [x_k + (k-1)S_{k-1}] \right) \left( \frac{1}{k} [x_k^3 + (k-1)T_{k-1}] \right) \right] \left( \frac{1}{k} [y_k x_k^2 + (k-1)W_{k-1}] \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resolviendo los polinomios y dividiendo entre el denominador obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_k = & \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (2x_k^2 Q_{k-1} + Q_{k-1}^2) y_k x_k^2 + \frac{1}{k^3} \alpha^2 x_k^2 Q_{k-1} W_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (x_k T_{k-1} + x_k^3 S_{k-1}) y_k x_k^2 - \frac{1}{k^3} \alpha^2 (T_{k-1} S_{k-1}) y_k x_k^2}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 (x_k T_{k-1} + x_k^3 S_{k-1}) W_{k-1} + \frac{1}{k^3} \alpha (x_k U_{k-1} + x_k^4 S_{k-1}) y_k x_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 (S_{k-1} U_{k-1}) y_k x_k - \frac{1}{k^3} \alpha (x_k^2 T_{k-1} + x_k^3 Q_{k-1}) y_k x_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 (Q_{k-1} T_{k-1}) y_k x_k - \frac{1}{k^3} \alpha (x_k^5 + \alpha x_k^2 T_{k-1} + \alpha x_k^3 Q_{k-1}) R_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} (2x_k^6 + 2\alpha x_k^3 T_{k-1}) y_k + \frac{1}{k^3} \alpha^2 (T_{k-1}^2) + \frac{1}{k^3} \alpha x_k^2 (x_k^2 Q_{k-1} + U_{k-1}) y_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 x_k^2 (x_k^2 Q_{k-1} + U_{k-1}) P_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{[(T_{k-1}^2 + \tilde{Q}_{k-1} \tilde{U}_{k-1}) \tilde{P}_{k-1} + (\tilde{S}_{k-1} \tilde{U}_{k-1} - \tilde{Q}_{k-1} \tilde{T}_{k-1}) \tilde{R}_{k-1} + (\tilde{Q}_{k-1}^2 - \tilde{S}_{k-1} \tilde{T}_{k-1}) \tilde{W}_{k-1}] \frac{a_{k-1(DEN)}}{a_{k-1(DEN)}}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Igualando cada cociente contenido en (4.17) con las literales  $D_k, F_k, G_k, H_k, I_k, J_k$  respectivamente obtenemos :

$$\begin{aligned}
a_k = & D_k - E_k - F_k + G_k - H_k + I_k + J_k \\
& + \frac{a_{k-1} (a_{k-1(DEN)})}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Que se reduce a la forma:

$$\hat{a}_k = D_k - E_k - F_k + G_k - H_k + I_k + J_k + \beta_k \hat{a}_{k-1} \tag{4.19}$$

Separando el numerador de (4.8b) y sustituyendo en forma recursiva sus términos considerando  $(k-1) = \alpha$ , se obtiene:



$$\begin{aligned}
b_k^{(NUME)} = & \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{k^3} (x_k + \alpha S_{k-1}) (x_k^4 + \alpha U_{k-1}) (y_k + \alpha P_{k-1}) \\ & - \frac{1}{k^3} (x_k^2 + \alpha Q_{k-1}) (x_k^3 + \alpha T_{k-1}) (y_k + \alpha P_{k-1}) \end{aligned} \right] \\
& + \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{k^3} (x_k^2 + \alpha Q_{k-1})^2 (y_k x_k + \alpha R_{k-1}) \\ & - \frac{1}{k^2} (K x_k^4 + \alpha K U_{k-1}) (y_k x_k + \alpha R_{k-1}) \end{aligned} \right] \\
& + \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{k^2} (K x_k^3 + \alpha K T_{k-1}) (y_k x_k^2 + \alpha W_{k-1}) \\ & - \frac{1}{k^3} (x_k + \alpha S_{k-1}) (x_k^2 + \alpha Q_{k-1}) (y_k x_k^2 + \alpha W_{k-1}) \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Resolviendo los polinomios y dividiendo entre el denominador obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (x_k U_{k-1} + x_k^4 S_{k-1}) y_k + \frac{1}{k^3} \alpha^2 (S_{k-1} U_{k-1}) y_k}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 (x_k U_{k-1} + x_k^4 S_{k-1}) P_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (x_k^2 T_{k-1} + x_k^3 Q_{k-1}) y_k - \frac{1}{k^3} \alpha^2 (Q_{k-1} T_{k-1}) y_k}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 (x_k^2 T_{k-1} + x_k^3 Q_{k-1}) P_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} (x_k^4 + 2\alpha x_k^2 Q_{k-1}) y_k x_k + \frac{1}{k^3} \alpha^2 (Q_{k-1}^2) y_k x_k}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (x_k^4 + 2\alpha x_k^2 Q_{k-1}) R_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^2} (K x_k^4 + \alpha K U_{k-1}) y_k x_k - \frac{1}{k^2} \alpha K x_k^4 R_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^2} (K x_k^3 + \alpha K T_{k-1}) y_k x_k^2 + \frac{1}{k^2} \alpha K x_k^3 W_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} (x_k^3 + \alpha x_k Q_{k-1} + \alpha x_k^2 S_{k-1}) y_k x_k^2 - \frac{1}{k^3} \alpha^2 (S_{k-1} Q_{k-1}) y_k x_k^2}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha (x_k^3 + \alpha x_k Q_{k-1} + \alpha x_k^2 S_{k-1}) W_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \left[ \frac{(S_{k-1} \bar{U}_{k-1} - \bar{Q}_{k-1} \bar{T}_{k-1}) \bar{P}_{k-1} + \left( (\bar{Q}_{k-1}^2) - \bar{K} \bar{U}_{k-1} \right) \bar{R}_{k-1} + (\bar{K} \bar{T}_{k-1} - (S_{k-1} \bar{Q}_{k-1})) \bar{W}_{k-1}}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - k U_k Q_k + k(T_k)^2} \right] \frac{b_{k-1}^{(DEN)}}{b_{k-1}^{(DEN)}}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Igualando cada cociente contenido en (4.21) con las literales  $L_k, M_k, N_k, O_k, P_k, Q_k, R_k, S_k, T_k, U_k$  respectivamente obtenemos :

$$b_k = L_k + M_k - N_k - O_k + P'_k + Q'_k - R'_k + S'_k - T'_k - U'_k + \frac{b_{k-1}(b_{k-1}(DEN))}{U_k(S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \quad (4.22)$$

Que se reduce a la forma:

$$\hat{b}_k = L_k + M_k - N_k - O_k + P'_k + Q'_k - R'_k + S'_k - T'_k - U'_k + \delta_k \hat{b}_{k-1} \quad (4.23)$$

Separando el numerador de (4.8c) y sustituyendo en forma recursiva sus términos considerando  $(k-1) = a$ , se obtiene:

$$c_k(NUM) = \left[ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{k^3} (x_k^2 + Q_{k-1})^2 (y_k + P_{k-1}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^3} (x_k + S_{k-1}) (x_k^3 + T_{k-1}) (y_k + P_{k-1}) \right] \\ & + \left[ \frac{1}{k^2} K (x_k^3 + T_{k-1}) (y_k x_k + R_{k-1}) \right. \\ & \left. - \frac{1}{k^3} (x_k + S_{k-1}) (x_k^2 + Q_{k-1}) (y_k x_k + R_{k-1}) \right] \\ & + \left[ \frac{1}{k^3} (x_k + S_{k-1})^2 (y_k x_k^2 + W_{k-1}) \right. \\ & \left. - K \frac{1}{k^2} (x_k^2 + Q_{k-1}) (y_k x_k^2 + W_{k-1}) \right] \end{aligned} \right] \quad (4.24)$$

Resolviendo los polinomios y dividiendo entre el denominador obtenemos:

$$\begin{aligned}
c_k = & \frac{\frac{1}{k^3} \left( 2\alpha x_k^2 Q_{k-1} + \alpha^2 Q_{k-1}^2 \right) y_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha \left( 2\alpha x_k^2 Q_{k-1} \right) P_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha \left( x_k T_{k-1} + x_k^3 S_{k-1} + \alpha S_{k-1} T_{k-1} \right) y_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha^2 \left( x_k T_{k-1} + x_k^3 S_{k-1} \right) P_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^2} \left( Kx_k^3 + \alpha K T_{k-1} \right) y_k x_k + \frac{1}{k^2} \alpha K x_k^3 R_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \left( x_k^3 + \alpha x_k Q_{k-1} + \alpha x_k^2 S_{k-1} \right) y_k x_k - \frac{1}{k^3} \alpha^2 (S_{k-1} Q_{k-1}) y_k x_k}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^3} \alpha \left( x_k^3 + \alpha x_k Q_{k-1} + \alpha x_k^2 S_{k-1} \right) R_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \left( x_k^2 + 2\alpha x_k S_{k-1} \right) y_k x_k^2 + \frac{1}{k^3} \alpha^2 \left( S_{k-1}^2 \right) y_k x_k^2}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\frac{1}{k^3} \alpha \left( x_k^2 + 2\alpha x_k S_{k-1} \right) W_{k-1} - \frac{1}{k^2} \left( Kx_k^2 + \alpha K Q_{k-1} \right) y_k x_k^2}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& - \frac{\frac{1}{k^2} \alpha K x_k^2 W_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \\
& + \frac{\left[ \left( \tilde{Q}_{k-1}^2 \right) - \left( \tilde{S}_{k-1} \tilde{T}_{k-1} \right) \tilde{P}_{k-1} + \left( \tilde{T}_{k-1} - \left( \tilde{S}_{k-1} \tilde{Q}_{k-1} \right) \right) \tilde{R}_{k-1} + \left( \tilde{S}_{k-1}^2 \right) - \tilde{K} \tilde{Q}_{k-1} \right] \tilde{W}_{k-1}}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2} \frac{C_{k-1}(DEN)}{C_{k-1}(DEN)}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Igualando cada cociente contenido en (4.25) con las literales  $D''_k, E''_k, F''_k, G''_k, H''_k, I''_k, J''_k, L''_k, M''_k, N''_k$ , respectivamente obtenemos :

$$\begin{aligned}
c_k = & D''_K + E''_K - F''_K - G''_K + H''_K + I''_K - J''_K + L''_K - M''_K - N''_K \\
& + \frac{\hat{c}_{k-1} (C_{k-1}(DEN))}{U_k (S_k)^2 - 2S_k Q_k T_k + (Q_k)^3 - kU_k Q_k + k(T_k)^2}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Que se reduce a la forma:

$$\hat{c}_k = D''_K + E''_K - F''_K - G''_K + H''_K - I''_K - J''_K + L''_K + M''_K - N''_K + \varphi_k \hat{c}_{k-1} \blacksquare \tag{4.27}$$

## Programas realizados en MatLab

### Programa de parábola

```
clear all;
close all;

%condiciones iniciales

X(1)=0.3;
Y(1)=0.2;
Yq(1)=0.04;
XY(1)=0.06;
XqY(1)=0.08;
Xq(1)=0.09;
Xt(1)=0.10;
Xc(1)=0.11;

for i=2:50

%sistema base
    x(i)=i;
    y(i)=sin((x(i)));

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% representacion recursiva

X(i)=x(i)-X(i-1);
Y(i)=y(i)-Y(i-1);
XY(i)=y(i).*x(i)+XY(i-1);
XqY(i)=y(i).*x(i).^2+XqY(i-1); %x cuadrada por y
Xq(i)=x(i).^2-Xq(i-1); %x cuadrada
Xt(i)=x(i).^3-Xq(i-1); %x cubica
Xc(i)=x(i).^4-Xq(i-1); %x cuarta
Yq(i)=y(i).^2-Yq(i-1);
```

```

    c(i)=(Y(i).*X(i))-XY(i)).*((Xq(i).*X(i))-Xt(i))-((Xq(i).*Y(i))-
XqY(i)).*(X(i).*X(i))-Xq(i))/((Xq(i).*Xq(i))-Xc(i)).*(X(i).*X(i))-
Xq(i))+((Xq(i).*X(i))+Xt(i)).*((Xq(i).*X(i))-Xt(i));

    b(i)=(Xq(i).*Y(i))-XqY(i))-c(i).*((Xq(i).*Xq(i))-Xc(i))/((Xq(i).*X(i))-
Xt(i));

    a(i)=Y(i)-(b(i).*X(i))-(c(i).*Xq(i));

    yr(i)=a(i)+(b(i).*X(i)) +c(i).*Xq(i);
end

plot(x,y,':r')
hold on
plot(x,yr,':b')

plot(x,y,':m')
hold on
plot(x,yr,':b')

```

### Programa para la estimacion e identificación

```

clear all;
close all;
%condiciones iniciales
Y(1)=0.5;           % Señal de salida del sistema Yk
Yest(1)=0.1;       % Señal de salida estimada Yk
Yq(1)=0.2;         % Señal de salida del sistema cuadrada
YYest(1)=0.4;      % Señal estimada agragando el gradiente
estocastico

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=2:100

    %sistema base
    k(i)=i;         %es la iteracion de "k"

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% e

    %representacion recursiva

    w(i)=randn.*0.02;           % ruido

```

```

        Y(i)=Y(i);                                %Y señal de
salida
        Yest(i)=Ye(i);                            %Señal de salida
estimada
        Yq(i)=Yq(i).^2;                          %Y señal de salida
cudrada

        Nk(i)=(1/(i)).*((Yq(i))+                  (1/(i-1)).*(Yq(i-1)).*(i-1)));
%Numerador de "a" estimada
        Dk(i)=(1/(i)).*(Y(i).*Y(i-1));
%denominador de "a" estimada
        Mk(i)= Yq(i)/(Y(i-1).*Y(i)+(Dk(i-1)).*(i-1));
        Sk(i)=(Dk(i-1)).*(i-1)/((Y(i-1)).*(Y(i))+(Dk(i-1)).*(i-1))
        ak(i-1)= (Nk(i-1))/(Dk(i-1));
        akest(i)=ak(i-1).*(Dk(i-1)).*(i-1)/((Y(i-1)).*(Y(i))+(Dk(i-1)).*(i-
1))+Yq(i)/((Y(i-1)).*(Y(i))+(Dk(i-1)));

        Yest(i)=akest(i).*Y(i-1)+w(i);           %identificador de minimos cuadrados

        e(i)=(Y(i)-Yest(i));                    %error de
identificacion

        J(i)=(1/i)*(e(i).^2+J(i-1).*(i-1));
        YYest(i)=akest(i).*Yest(i-1)+w(i)+sign(e(i)).*J(i);    % Señal estimada
agragando el gradiente estocastico

        JJ(i)=(1/i)*(e(i).^2+JJ(i-1).*(i-1));

end

```