INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Algoritmos Córdicos

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS

PRESENTA
ESTHER LEYVA SUÁREZ

Director de Tesis
LIC. EDUARDO VIRUEÑA SILVA

México, D. F. Junio de 2004

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico con todo cariño a:

Mis padres:

Miguel Ángel Leyva Guzmán *Irene Suárez Medina*

Mis hermanos:

Adriana Suárez Pérez *Gabriela Suárez Pérez*

Ma. Eugenia Suárez Pérez *Verónica Leyva Suárez*

Claudia Leyva Suárez *Martha Mons. Leyva Suárez*

Miguel Ángel Leyva Suárez

A mis profesores:

Pablo Lam Estrada

Eduardo Virueña Silva

.

Agradecimientos

Te agradezco Señor por todo lo que me has dado, principalmente la vida y además:

Unos padres maravillosos; que tiempo atrás no entendía el motivo de sus enojos y castigos, los cuales me parecian injustos, que al paso del tiempo, me hiciste comprender todo lo que han hecho por amor a sus hijos incluyéndome ... y ahora puedo decirle al mundo entero con gran orgullo, que ***Miguel Angel*** e ***Irene***, son los mejores padres que pudiera tener.

Unos hermanos, que aunque diferimos en edades y opiniones, ***Adriana***, ***Gabriela***, ***María Eugenia***, ***Verónica***, ***Claudia***, ***Martha Monserrat*** y ***Miguel Angel***, son las mejores personas y verdaderos amigos que he podido encontrar, porque me han apoyado incondicionalmente en todo momento.

Unos buenos profesores, que me han enseñado los conocimientos que tengo, y que algunos de ellos me han brindado su amistad ... entre ellos ***Pablo Lam Estrada*** y ***Eduardo Viruña Silva***, a quienes estimo mucho y no sé cómo agradecer su amistad y ayuda que me han brindado incondicionalmente.

Unos amigos que me han impulsado a seguir adelante, y que con el tiempo hemos reforzado nuestra amistad. A ***Elías***, ***Enrique***, ***Laura***, ***Cariño***, ***Pilar***, ***Hugo***, ***Fernando***, ***Germán***, ***Alejandra*** e ***Iván***, gracias por su amistad.

Introducción

En 1959 fueron desarrollados los *Algoritmos Córdicos* por Jack E. Volder, para evaluar las funciones trigonométricas y en 1971, J. Walter los extendió para poder evaluar las funciones trascendentales. La palabra **"CORDIC"** es un acrónimo en inglés que significa **CO**ordinate **R**otation on **DI**gital **C**omputers.

En este trabajo se estudian los *Algoritmos Córdicos*, con los cuales podremos calcular las funciones trigonométricas e hiperbólicas de una manera más compacta, eficiente y mayor precisión.

En el primer capítulo de este trabajo enunciaremos resultados importantes sobre series y series de potencias de números complejos. Además, en el segundo capítulo trabajaremos con las funciones complejas elementales para obtener la construcción y propiedades importantes de las mismas para poder comprender los algoritmos córdicos.

En el tercer capítulo de este trabajo, se calcularán las funciones trigonométricas mediante una serie a la cual se le aplicará una infinidad de rotaciones, y con esta idea se obtendrá un algoritmo que realice este proceso. Y análogamente se calcularán las funciones hiperbólicas. Además se realizarél cálculo de las constantes que aparecen en este proceso, necesarias para calcular las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Finalmente, se presentara el código del programa que calcula los valores de las funciones trigonométricas e hiperbólicas y algunos resultados que se obtienen con éste programa.

Índice general

Capítulo 1

Series y Series de Potencias de Números Complejos

En las dos secciones que conforman este capítulo enunciaremos los resultados importantes sobre series y series de potencias de números complejos. Las demostraciones de los teoremas pueden ser consultadas en [1].

1.1. Series de Números Complejos

Una **serie** de números complejos es una expresión formal de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, donde a_n es un número complejo, para cada $n \geq 0$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es una serie de números complejos, entonces definimos la sucesión $\{s_n\}_n$ de **sumas parciales** de la serie, donde

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_n$ es convergente, y a este límite se le llama la **suma de la serie**. Abusando un poco de la notación diremos que, si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces el límite de su sucesión de sumas parciales se denotará también por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; por otro lado, también la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se representa por la expresión

$$a_0 + a_1 + \cdots +, \quad \text{o por} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

para hacerla más explícita.

Teorema 1.1.1 *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de números reales tales que* $0 \leq a_n \leq b_n$, *para cada* $n \geq 0$. *Entonces, si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *es convergente, se tiene que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *también lo es, y se cumple la relación*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n. \blacksquare$$

Teorema 1.1.2 (Leibnitz) *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales positivos decreciente y que converge a* 0. *Entonces, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ *es convergente.*
$\blacksquare$

Definición 1.1.1 *Sea* $p : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ *una función tal que*

$$p(n) < p(m), \quad \text{si} \quad n < m.$$

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de números complejos relacionadas como sigue:*

$$b_0 = a_0 + a_1 \cdots + a_{p(0)},$$

y

$$b_n = a_{p(n-1)+1} + a_{p(n-1)+2} + \cdots + a_{p(n)}, \quad \text{si} \quad n \geq 1.$$

Entonces, diremos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **se ha obtenido a partir de** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **por introducción de paréntesis**, *y que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **se ha obtenido de** $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ **por suprimir paréntesis**.

Teorema 1.1.3 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de números complejos la cual es convergente con suma a. Entonces, toda serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *obtenida a partir de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *por introducción de paréntesis también es convergente con suma a.* ■

Definición 1.1.2 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de números complejos. Decimos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ **converge absolutamente** *si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} | a_n |$ *es convergente.*

Teorema 1.1.4 *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie de números complejos. Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es absolutamente convergente, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *es convergente, y se tiene que*

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} | a_n |. \blacksquare$$

1.2. Convergencia Uniforme y Series de Potencias

Definición 1.2.1 *Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{C}$, y f una función de A en $\mathbb{C}$.*

(*i*) *Decimos que la sucesión $\{f_n\}_n$* **converge puntualmente hacia f sobre** *A, si se tiene que $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$, para cada $z \in \mathbb{C}$.*

(*ii*) *La sucesión $\{f_n\}_n$* **converge uniformemente hacia f sobre** *A o que f_n* **tiende hacia f uniformemente sobre** *A, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $z \in A$, la relación $n \geq N$ implica que $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$.*

(*iii*) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* **converge uniformemente hacia f sobre** *A, si la sucesión de sumas parciales $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ tiende hacia f uniformemente sobre A.*

(*iv*) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$* **es convergente absolutamente hacia f sobre** *A, si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge puntualmente hacia $|f|$ sobre A.*

Nuestro primer teorema determina uno de los criterios más importantes en el Análisis Matemático, pues establece ciertas condiciones para que se tenga la convergencia absoluta y uniforme de una sucesión de funciones.

Teorema 1.2.1 (Criterio M de Weierstrass) *Sean A un subconjunto de $\mathbb{C}$, $\{f_n\}_n$ una sucesión de funciones de A en $\mathbb{C}$, y f una función de A en $\mathbb{C}$. Supóngase que $\{M_n\}_n$ es una sucesión de números reales positivos tales que $|f_n(z)| \leq M_n$, para cada $z \in A$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, y además la serie*

$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *es convergente. Entonces, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge absolutamente y uniformemente hacia la función* $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, $z \in A$. ■

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{1.1}$$

se llama **serie de potencias en** $z - z_0$, donde cada $a_n\, n \in \mathbb{N}$, z y z_0 son números complejos. Toda serie de potencias como en (1.1) tiene asociada una bola abierta con centro en z_0 en $\mathbb{C}$ a la que llamaremos **disco de convergencia**, y cumple con la propiedad de que la serie es absolutamente convergente en todo elemento de dicha bola abierta, y divergente en todo elemento que pertenezca a su exterior. Al radio del disco de convergencia se le llama **radio de convergencia** de la serie de potencias, y este radio puede tomar valores en el intervalo cerrado $[0, +\infty]$.

El siguiente teorema establece la existencia del disco de convergencia, y nos proporciona un método para calcular su radio.

Teorema 1.2.2 *Dada la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, *definimos*

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{\lambda},$$

donde $r = 0$ *si* $\lambda = +\infty$ *y* $r = +\infty$ *si* $\lambda = 0$. *Entonces, la serie converge absolutamente si* $\mid z - z_0 \mid < r$ *y diverge si* $\mid z - z_0 \mid > r$. *Además, la serie converge uniformemente en todo subconjunto compacto del disco de convergencia.* ■

Una serie de potencias que es en ocasiones útil es la llamada **serie geométrica**, la cual presentamos en el teorema siguiente.

Teorema 1.2.3 *La serie geométrica* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *tiene radio de convergencia* 1. ■

En efecto, para obtener que el radio de convergencia de la serie geométrica es 1, basta aplicar el Teorema 1.2.2. Así, esta serie converge absolutamente en la bola con centro en el origen y de radio 1.

Teorema 1.2.4 *Supóngase que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge para todo* $z \in B(z_0; r)$. *Entonces, la función* f *definida por la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathrm{B}(z_0; r), \tag{1.2}$$

es continua en $B(z_0; r)$. ■

Diremos que la serie (1.2) representa f en $\mathrm{B}(z_0; r)$. Se dice también que se tiene **el desarrollo de f en serie de potencias alrededor de z_0.**

Teorema 1.2.5 *Supóngase que la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge para todo* $z \in B(z_0; r)$. *Entonces, la función* f *definida por la ecuación*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in \mathrm{B}(z_0; r), \tag{1.3}$$

tiene derivada $f'(z)$ *para cada* $z \in \mathrm{B}(z_0; r)$ *dada por*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}. \blacksquare \tag{1.4}$$

Observación 1.2.1 Las series dadas en (1.3) y (1.4) tienen el mismo radio de convergencia. Por otro lado, aplicando reiteradamente la derivada en (1.4) y evaluando en z_0 obtenemos las fórmulas importantes

$$f^{(k)}(z_0) = k!a_k \quad (k \geq 0) \tag{1.5}$$

y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \tag{1.6}$$

válida (1.6) para todo z en el disco de convergencia.

El siguiente teorema sobre series de números complejos determinará y justificará la multiplicación algebraica de dos series. Para esto, definamos lo que será para nosotros el producto de dos series.

Sean $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ dos series de números complejos. Definimos, para cada $n \geq 0$,

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ se llama el **producto de Cauchy** de las series $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, que se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n := \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \ .$$

Teorema 1.2.6 *Sean* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series de números complejos, las cuales convergen absolutamente y tienen suma* a *y* b *respectivamente. Entonces, el producto de Cauchy de estas dos series converge y tiene suma* ab. ■

Como una aplicación del teorema anterior a las series de potencias, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 1.2.7 *Sean* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathrm{B}(0; r)$, *y* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $z \in \mathrm{B}(0; r_1)$ *dos desarrollos en series de potencias alrededor del origen. Entonces, el producto* $f(z)g(z)$ *viene dado por la serie de potencias*

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathrm{B}(0; r) \cap \mathrm{B}(0; r_1),$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n \geq 0). \blacksquare$$

El producto dado en el teorema anterior se llama el **producto de Cauchy** de las series dadas.

Capítulo 2

Funciones Complejas Elementales

En este capítulo trabajaremos con las funciones complejas elementales para obtener la construcción y propiedades importantes de las mismas y para comprender los Algoritmos Córdicos que presentaremos en el siguiente capítulo.

2.1. Función Exponencial y Logaritmo Complejos

Iniciamos esta sección con el siguiente teorema, el cual nos define la función exponencial.

Teorema 2.1.1 *La serie de potencias*

$$e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \tag{2.1}$$

converge absolutamente y uniformemente en todo el plano complejo. Además, determina una función continua y derivable.

Demostración Tenemos que, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Por el Teorema 1.2.2, concluimos que la serie de potencias dada en (2.1) converge absolutamente y uniformemente en todo el plano complejo. Además, se sigue de los Teoremas 1.2.4 y 1.2.5, la continuidad y la derivabilidad de la serie de potencias que nos ocupa. ■

Es de notar que cuando $x \in \mathbb{R}$, entonces la expresión e^x corresponde exactamente a la función exponencial (real) valuada en x.

Teorema 2.1.2 *Tenemos que para cada $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,*

(i) $e^0 = 1$.

(ii) $(e^z)' = e^z$.

(iii) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

(iv) $e^z \neq 0$.

Demostración
(i) Es inmediato.
(ii) De acuerdo con el Teorema 1.2.5, tenemos que

$$\begin{aligned}(e^z)' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= e^z.\end{aligned}$$

(iii) Usando el producto de Cauchy de series (Teorema 1.2.6), obtenemos que

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

donde

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot z_1^k z_2^{n-k} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Por lo tanto, se tiene lo deseado.
(iv) Tenemos que $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$, lo cual implica que $e^z \neq 0$. ■

De acuerdo con el Teorema 2.1.2, (iv), tenemos que la función exponencial es una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$. Más aún, uno puede probar que la función exponencial es suprayectiva, es decir, para cada $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$. En efecto, dado un número complejo $w = x + iy$, $w \neq 0$, podemos expresar a w en coordenadas polares r y θ al escribir $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Los números r y θ determinan a w de manera única. Recíprocamente, el número positivo r está determinado unívocamente por w, de hecho, $r =\mid w \mid$. Sin embargo, w determina el ángulo θ salvo múltiplos de 2π. Hay una infinidad de valores de θ que satisfacen las ecuaciones $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, pero cada dos de ellos difieren en un múltiplo de 2π. Cada uno de estos valores de θ se llama un **argumento** de w, pero se distingue uno de ellos cuando $-\pi < \theta \leq \pi$, y se denomina el **argumento principal** de w, y se escribe en este caso $\theta = \arg(w)$. Luego, si tomamos $a \in \mathbb{R}$ tal que $e^a = r$, entonces tendremos que $w = e^z$, donde $z = a+i\theta$, es decir, trabajaremos más adelante con el coseno y seno complejos, y probaremos la relación $e^{a+i\theta} = e^a(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$.

La condición de suprayectividad de la función exponencial es importante para obtener la siguiente:

Definición 2.1.1 *Para cada $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, se define el* **logaritmo** *de z como aquel número complejo w que satisface la relación*

$$z = e^w. \tag{2.2}$$

Para $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, cualquier número complejo w que satisfaga la relación (2.2) se le denota por $\log(z)$. Así que con esta notación, la relación (2.2) se puede escribir ahora en la forma

$$z = e^{\log(z)}. \tag{2.3}$$

Es de notar que la relación determinada por el logaritmo no es una función. Sin embargo, en ciertas regiones del plano sí lo es. Por ejemplo, en la región $\{z \in \mathbb{C} \;\mid\; z \neq 0,\; \pi < \arg(z) < \pi\}$, la relación determinada por el logaritmo es una función, llamada la **rama principal del logaritmo**. Mientras no se establezca lo contrario, estaremos trabajando sólo con esta rama.

Teorema 2.1.3 *Para cada $z, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $zz_1 \neq 0$, se tiene lo siguiente:*

(i) $\log(1) = 0$.

(ii) $\log(zz_1) = \log(z) + \log(z_1)$.

(iii) $\log(z^{-1}) = -\log(z)$.

(iv) $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Demostración (i) Puesto que $1 = e^0$, tenemos que $\log(1) = 0$.
(ii) Tenemos que

$$e^{\log(z)+\log(z_1)} = e^{\log(z)}e^{\log(z_1)} = zz_1.$$

Por lo tanto, $\log(zz_1) = \log(z) + \log(z_1)$.
(iii) Similarmente que en (i) y (ii), tenemos que

$$e^{-\log(z)} = \frac{1}{e^{\log(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Por lo tanto, $\log(z^{-1}) = -\log(z)$.
(iv) Derivando la Ecuación (2.3) en ambos miembros, tenemos que

$$1 = e^{\log(z)} \log'(z).$$

Por lo tanto,

$$\log'(z) = \frac{1}{z}. \blacksquare$$

De acuerdo con el Teorema 2.1.3, (iv), uno puede probar por recurrencia que

$$\log^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{z^n}, \tag{2.4}$$

para cada $n \geq 1$. En consecuencia, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 2.1.4 *Se cumple que*

(*i*) *La serie de potencias*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}+\cdots$$

converge absolutamente en el disco unitario abierto centrado en el origen. Además, converge uniformemente en todo subconjunto compacto del disco abierto unitario, y determina una función continua y derivable.

(*ii*)

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$$

para $z\in\mathbb{C}$, *con* $\mid z\mid<1$.

Demostración (i) Tenemos que, para cada $z\in\mathbb{C}$,

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1.$$

Por el Teorema 1.2.2, concluimos que la serie de potencias dada converge absolutamente y uniformemente en todo el plano complejo. Además, se sigue de los Teoremas 1.2.4 y 1.2.5, la continuidad y la derivabilidad de la serie de potencias.
(ii) De acuerdo con la Ecuación (2.4), tenemos que

$$\log^{(n)}(1+z)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+z)^n},$$

para cada $n\geq 1$. Así que, la serie de potencias alrededor del origen de la función $\log(1+z)$ está dada por

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz_n,$$

donde $a_0=\log(1)=0$ y

$$a_n=\frac{\log^{(n)}(1)}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

para cada $n \geq 1$ (ver la Ecuación (1.6)). Usando (i) concluimos que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$$

para $z \in \mathbb{C}$, con $| z |< 1$. ■

Observemos que por el Teorema 1.1.2, la serie siguiente está bien definida

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es decir la serie determinada por $\log(1+z)$ en $z = 1$, es convergente. Mientras que para $z = -1$, la serie dada en el Teorema 2.1.4, (i), no converge.

El siguiente teorema, importante para nosotros, será utilizado más adelante.

Teorema 2.1.5 *Para cada* $z \in \mathbb{C}$, *con* $| z |< 1$, *se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \\ &= z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots + \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \end{aligned}$$

Demostración Sea $z \in \mathbb{C}$, con $| z |< 1$ y $z = x_0 + iy_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$. Entonces, notemos que $z \neq 1$, y que

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+z}{1-z} \cdot \frac{1-\overline{z}}{1-\overline{z}} = \frac{1+z-\overline{z}-z\overline{z}}{1-z-\overline{z}+z\overline{z}} \\ &= \frac{(1-x_0^2+y_0^2)}{(1-x_0)^2+y_0^2} + i\frac{2y_0}{(1-x_0)^2+y_0^2} \\ &\notin \mathbb{C} - \{z = x + iy \in \mathbb{C} \;\mid\; x \leq 0,\; y = 0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tiene sentido aplicar el logaritmo para obtener que

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \log(1+z) - \log(1-z) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-z)^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1} + 1) z^n}{n} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k-1}}{2k-1} \\
&= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene lo deseado. ■

A partir de las funciones exponencial y logaritmo complejos, podemos definir potencias de números complejos como sigue:

Definición 2.1.2 *Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, definimos*

$$z^w := e^{w \log(z)}.$$

Teorema 2.1.6 *Para cada $z, w, w_1 \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, se cumple que*

$$z^{w+w_1} = z^w z^{w_1}.$$

Demostración Se sigue de que

$$z^{w+w_1} = e^{(w+w_1)\log(z)} = e^{w \log(z)} e^{w_1 \log(z)} = z^w z^{w_1}. \blacksquare$$

2.2. Funciones Trigonométricas Complejas

Definición 2.2.1 *Se definen las funciones* **coseno** *y* **seno** *como:*

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y

$$\mathrm{sen}(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

para cada $z \in \mathbb{C}$, donde i es la unidad imaginaria.

De acuerdo con el Teorema 2.1.1, tenemos que las funciones coseno y seno son funciones continuas y derivables. Además, puesto que la función exponencial está dada por medio de una serie de potencias alrededor del origen, tenemos entonces el teorema siguiente.

Teorema 2.2.1 *Las funciones* sen *y* cos *cumplen:*

$$(i)\ \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(ii)\ \mathrm{sen}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

estas series convergen absoluta y uniformemente en todo el plano complejo.

Demostración Únicamente probaremos la serie dada para el coseno, el caso de la función seno puede hacerse por analogía. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(iz)^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+(-1)^n)i^n z^n}{n!}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i^{2n}z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i^2)^n z^{2n}}{(2n)!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Es de notarse que, de acuerdo con el teorema anterior, cuando evaluamos las funciones coseno y seno en un número real x, obtenemos las series que determinan las funciones coseno y seno reales.

Teorema 2.2.2 *Se tienen las siguientes identidades:*

(*i*) $e^z = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$, *con* $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

(*ii*) $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$.

(*iii*) $e^z = 1$ *si y sólo si* z *es múltiplo entero de* $2\pi i$.

(*iv*) $\cos^2(x) + \mathrm{sen}^2(x) = 1$, *para cada* $x \in \mathbb{R}$. *Es decir,* $\mid e^{ix} \mid^2 = 1$.

(*v*) $\cos(-z) = \cos(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*vi*) $\mathrm{sen}(-z) = -\,\mathrm{sen}(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*vii*) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y)$, *para cada* $x, y \in \mathbb{R}$.

(viii) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y)$, *para cada* $x, y \in \mathbb{R}$.

Demostración (i) Tenemos que:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\left(\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + i\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right) \\ &= e^x(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)). \end{aligned}$$

(ii) Se sigue inmediatamente de (i) al considerar que $e^0 = 1$.
(iii) Si $z = 2\pi i n$, donde n es un entero, entonces $e^z = \cos(2\pi n) + i\operatorname{sen}(2\pi n) = 1$. Recíprocamente, supongamos que $e^z = 1$. Es decir, $e^x\cos(y) = 1$ y $e^x \operatorname{sen}(y) = 0$, donde $z = x + iy$. Puesto que $e^x \neq 0$, debemos de tener que $\operatorname{sen}(y) = 0$, $y = k\pi$, para algún entero k. Pero, $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Por lo tanto, $e^x = (-1)^k$ ya que $e^x\cos(k\pi) = 1$. Como $e^x > 0$, k debe de ser un entero par. Por lo tanto, $x = 0$, y se tiene la afirmación.
(iv)

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2 - \left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(v)

$$\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

(vi)

$$\operatorname{sen}(-z) = \frac{e^{i(-z)}-e^{-i(-z)}}{2i} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen}(z).$$

(vii) Tenemos que

$$\begin{aligned} 2\cos(x+y) &= e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)} = e^{i(x+y)} + e^{i((-x)+(-y))} \\ &= e^{ix}e^{iy} + e^{i(-x)}e^{i(-y)} \\ &= (\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))\,(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) \\ &\quad + (\cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x))\,(\cos(-y) + i\operatorname{sen}(-y)) \\ &= (\cos(x) + i\operatorname{sen}(x))\,(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)) \\ &\quad + (\cos(x) - i\operatorname{sen}(x))\,(\cos(y) - i\operatorname{sen}(y)) \\ &= 2(\cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene lo deseado.
(viii) Se tiene que

$$\begin{aligned}
2i\,\mathrm{sen}(x+y) &= e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)} = e^{i(x+y)} - e^{i((-x)+(-y))} \\
&= e^{ix}e^{iy} - e^{i(-x)}e^{i(-y)} \\
&= (\cos(x) + i\mathrm{sen}(x))\,(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \\
&\quad - (\cos(-x) + i\mathrm{sen}(-x))\,(\cos(-y) + i\,\mathrm{sen}(-y)) \\
&= (\cos(x) + i\mathrm{sen}(x))\,(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)) \\
&\quad - (\cos(x) - i\mathrm{sen}(x))\,(\cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y)) \\
&= 2i(\cos(x)\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}(x)\cos(y)). \blacksquare
\end{aligned}$$

Con las propiedades establecidas en el teorema anterior, podemos ya decir que la función exponencial es una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}-\{0\}$ es suprayectiva, como fue mencionado en el comentario antes de la Definición 2.1.1. Más aún, se pueden probar las siguientes propiedades del argumento y del logaritmo de los números complejos:

Teorema 2.2.3 *Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:*

(i) Si $zw \neq 0$, entonces $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) + 2\pi n$*, donde*

$$n = \begin{cases} 0 & si \quad -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq \pi \\ 1 & si \quad -2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq -\pi \\ -1 & si \quad \pi < \arg(z) + \arg(w) \leq 2\pi \end{cases}$$

(ii) Si $z \neq 0$ y $-\pi < \arg(z) < \pi$, entonces $\log(z) = \ln \mid z \mid + \arg(z)$.

Demostración (i) Escribimos $\theta = \arg(z)$, $\theta_1 = \arg(w)$, $r = \mid z \mid$ y $r_1 = \mid w \mid$. Entonces, $z = re^{i\theta}$, $w = r_1 e^{i\theta_1}$ y $zw = rr_1 e^{\theta+\theta_1}$. Puesto que $-\pi < \theta, \theta_1 \leq \pi$, tenemos que $-2\pi < \theta + \theta_1 \leq 2\pi$. Por lo tanto, existe un n tal que $-\pi < \theta + \theta_1 + 2\pi n \leq \pi$. Este n es precisamente el dado en el teorema, y para este n tenemos que $\arg(zw) = \theta + \theta_1 + 2\pi n$.
(ii) Como $e^{\ln|z| + i\arg(z)} = e^{\ln|z|}e^{i\arg(z)} = \mid z \mid e^{i\arg(z)} = z$, y $-\pi < \arg(z) < \pi$, concluimos que $\log(z) = \ln \mid z \mid + i\arg(z)$. $\blacksquare$

Ahora definiremos la función tangente compleja, tal y como se hace en el caso real.

Definición 2.2.2 *Para cada $z \in \mathbb{C}$, definimos la función* **tangente** *en z como:*

$$\tan(z) := \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} \ ,$$

siempre que $\cos(z) \neq 0$.

Teorema 2.2.4 *Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = x_0 + iy_0$, para el cual está definido el número complejo $w = \tan(z)$. Entonces,*

(i) $e^{2iz} = \dfrac{1+iw}{1-iw}$.

(ii) $\mid w \mid < 1$ *si y sólo si*

$$\frac{(4k-1)\pi}{4} < x_0 < \frac{(4k+1)\pi}{4} \ ,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración (i) Puesto que

$$w = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)} = \frac{e^{2iz} - 1}{i\left(e^{2iz} + 1\right)} \ ,$$

al despejar e^{2iz}, obtenemos que

$$e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}.$$

(ii) Para cualquier número complejo $v = x+iy$, tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} \mid v-1 \mid < \mid v+1 \mid \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 < (x+1)^2 + y^2 \Longleftrightarrow 4x > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x > 0, \end{aligned}$$

es decir

$$| v - 1 |<| v + 1 | \Longleftrightarrow x > 0.$$

En particular, aplicando la equivalencia anterior, tendremos que

$$\begin{aligned} | w |< 1 &\Longleftrightarrow | e^{2iz} - 1 |<| e^{2iz} + 1 | \\ &\Longleftrightarrow Re\left(e^{2iz}\right) > 0 \Longleftrightarrow \cos(2x_0) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{(4k-1)\pi}{4} < x_0 < \frac{(4k+1)\pi}{4}\ , \end{aligned}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. ■

Observemos que de acuerdo con el teorema anterior, en ciertas regiones del plano complejo, la función tangente tiene inversa. En efecto, si $w = \tan(z)$, entonces tendremos que $e^{2iz} = \dfrac{1+iw}{1-iw}$, y por lo tanto, al considerar alguna rama del logaritmo adecuada, obtendremos que

$$z = -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right).$$

Por supuesto, si $| w |< 1$, entonces podemos considerar la rama principal del logaritmo (ver Teorema 2.1.5). Así pues, establecemos la siguiente definición.

Definición 2.2.3 *Para cada número complejo z tal que $z \neq -i$, se define el* **arco tangente** *de z como*

$$\arctan(z) := -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

Usando la rama principal del logaritmo, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5 *Se tiene que*

(*i*) *La serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1} \quad = \quad z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

converge absolutamente en el disco abierto unitario centrado en el origen. Además, converge uniformemente en todo subconjunto compacto del disco abierto unitario, y determina una función continua y derivable.

(ii) Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mid z \mid < 1$, se tiene que

$$\arctan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}.$$

Demostración (i) Para obtener lo deseado, notemos que la serie considerada es una serie de potencias alrededor del origen, así que bastará con obtener su radio de convergencia (Teorema 1.2.2). Pero esto se obtiene al tener que $\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{2k+1} = 1$, y por lo tanto el radio de convergencia de la serie es 1.
(ii) Esta segunda parte, utilizaremos el Teorema 2.1.5.

$$\begin{aligned} \arctan(z) &= -\frac{i}{2}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-iz)^{2k+1}}{2k+1} \\ &= -i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{2k+1}z^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}z^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}. \blacksquare \end{aligned}$$

2.3. Funciones Hiperbólicas

En esta sección se seguirá una metodología similar a la que se empleó en el caso de las funciones trigonométricas complejas, para obtener resultados análogos para las funciones hiperbólicas.

Definición 2.3.1 *Se definen las funciones* coseno hiperbólico *y* seno hiperbólico *como:*

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

y

$$\operatorname{senh}(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

para cada $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.3.1 *Tenemos que*

$$(i)\ \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(ii)\ \operatorname{senh}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

estas series convergen absoluta y uniformemente en todo el plano complejo.

Demostración Únicamente probaremos la serie dada para el seno hiperbólico, el caso del coseno hiperbólico puede obtenerse por analogía. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(z) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(1+(-1)^{n+1})z^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 *Se tienen las siguientes identidades:*

(*i*) $e^z = \cosh(z) + \operatorname{senh}(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*ii*) $\cosh(iz) = \cos(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*iii*) $\operatorname{senh}(iz) = i\operatorname{sen}(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*iv*) $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*v*) $\cosh(-z) = \cosh(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*vi*) $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh}(z)$, *para cada* $z \in \mathbb{C}$.

(*vii*) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \operatorname{senh}(z)\operatorname{senh}(w)$, *para cada* $z, w \in \mathbb{C}$.

(*viii*) $\operatorname{senh}(z+w) = \operatorname{senh}(z)\cosh(w) + \cosh(z)\operatorname{senh}(w)$, *para cada* $z, w \in \mathbb{C}$.

(*ix*) $\cosh(z) = \cos(y)\cosh(x) + i\operatorname{sen}(y)\operatorname{senh}(x)$, *para cada* $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(*x*) $\operatorname{senh}(z) = \operatorname{sen}(y)\cosh(x) - i\cos(y)\operatorname{senh}(x)$, *para cada* $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Demostración
(i) Tenemos que

$$2(\cosh(z) + \operatorname{senh}(z)) = (e^z + e^{-z}) + (e^z - e^{-z}) = 2e^z.$$

De aquí el resultado.
(ii) y (iii) se siguen inmediatamente de la definición de las funciones coseno y del seno (Definición 2.2.1).
(iv) se sigue de que

$$4(\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z)) = (e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2 = 4.$$

(v) y (vi) son inmediatas de las definición de las funciones coseno hiperbólico y del seno hiperbólico (Definición 2.3.1).
(vii) Se sigue de que

$$\begin{aligned}
4(\cosh(z)\cosh(w) + \operatorname{senh}(z)\operatorname{senh}(w)) &= (e^z + e^{-z})(e^w + e^{-w}) \\
&\quad + (e^z - e^{-z})(e^w - e^{-w}) \\
&= 2(e^z e^w + e^{-z} e^{-w}) \\
&= 2\left(e^{z+w} + e^{-(z+w)}\right) \\
&= 4\cosh(z+w).
\end{aligned}$$

(viii) es similar a (vii), se sigue de que

$$\begin{aligned}
4(\operatorname{senh}(z)\cosh(w) + \cosh(z)\operatorname{senh}(w)) &= (e^z - e^{-z})(e^w + e^{-w}) \\
&\quad + (e^z + e^{-z})(e^w - e^{-w}) \\
&= 2(e^z e^w - e^{-z} e^{-w}) \\
&= 2\left(e^{z+w} - e^{-(z+w)}\right) \\
&= 4\operatorname{senh}(z+w).
\end{aligned}$$

(ix) Se tiene que

$$\begin{aligned}
4(\cos(y)\cosh(x) + i\mathrm{sen}(y)\,\mathrm{senh}(x)) &= (e^{iy}+e^{-iy})(e^{x}+e^{-x}) \\
&\quad +(e^{iy}-e^{-iy})(e^{x}-e^{-x}) \\
&= 2\left(e^{x+iy}+e^{-(x+iy)}\right) \\
&= 2(e^{z}+e^{-z}) \\
&= 4\cosh(z).
\end{aligned}$$

y de aquí se sigue la relación.
(x) es similar a (ix)

$$\begin{aligned}
4i(\mathrm{sen}(y)\cosh(x) - i\cos(y)\,\mathrm{senh}(x)) &= (e^{iy}-e^{-iy})(e^{x}+e^{-x}) \\
&\quad +(e^{iy}+e^{-iy})(e^{x}-e^{-x}) \\
&= 2\left(e^{x+iy}-e^{-(x+iy)}\right) \\
&= 2(e^{z}-e^{-z}) \\
&= 4\,\mathrm{senh}(z). \blacksquare
\end{aligned}$$

Definición 2.3.2 *Para cada $z \in \mathbb{C}$, definimos la función* **tangente hiperbólica** *en z como:*

$$\tanh(z) := \frac{\mathrm{senh}(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}},$$

siempre que $\cosh(z) \neq 0$.

Observemos que para cada $z \in \mathbb{C}$, para el cual la tangente hiperbólica está definida, se tiene que

$$\tanh(z) = i\frac{e^{i(-iz)}-e^{-i(-iz)}}{i\left(e^{i(-iz)}+e^{-i(-iz)}\right)}$$

es decir, tenemos que

$$\tanh(z) = i\tan(-iz).$$

Por lo tanto, es natural pensar que podamos obtener resultados para el arco tangente hiperbólico similares a los que se establecieron para el arco tangente.

Teorema 2.3.3 *Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = x_0 + iy_0$, para el cual está definido el número complejo $w = \tanh(z)$. Entonces,*

(*i*) $e^{2z} = \dfrac{1+w}{1-w}$.

(*ii*) $\mid w \mid < 1$ *si y sólo si*

$$\frac{(4k-1)\pi}{4} < y_0 < \frac{(4k+1)\pi}{4} \ ,$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración
(i) Puesto que

$$w = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} \ ,$$

al despejar e^{2z}, obtenemos que

$$e^{2z} = \frac{1+w}{1-w}.$$

(ii) Recordemos que para cualquier número complejo $v = x + iy$, tenemos que

$$\mid v - 1 \mid < \mid v + 1 \mid \Longleftrightarrow x > 0$$

(demostración (ii) del Teorema 2.2.4). En particular, aplicando la equivalencia anterior, tendremos que

$$\begin{aligned} \mid w \mid < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mid e^{2z} - 1 \mid < \mid e^{2z} + 1 \mid \\ &\Longleftrightarrow \quad Re\left(e^{2z}\right) > 0 \Longleftrightarrow \cos(2y_0) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{(4k-1)\pi}{4} < y_0 < \frac{(4k+1)\pi}{4} \ , \end{aligned}$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$. ■

De nuevo, observemos aquí, que de acuerdo con el teorema anterior, en ciertas regiones el plano complejo, la función tangente hiperbólica también tiene inversa. Pues, si $w = \tanh(z)$, entonces tendremos que $e^{2z} = \dfrac{1+w}{1-w}$, y por lo tanto, al considerar alguna rama del logaritmo adecuada, obtendremos que

$$z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w}{1-w}\right).$$

Luego, si $\mid w \mid < 1$, entonces podemos considerar la rama principal del logaritmo (ver Teorema 2.1.5). Por lo tanto, establecemos la siguiente definición.

Definición 2.3.3 *Para cada número complejo z tal que $z \neq 1$, se define el* **arco tangente hiperbólico** *de z como*

$$\operatorname{arctanh}(z) := \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Usando la rama principal del logaritmo, y de acuerdo con el Teorema 2.1.5, tenemos el siguiente resultado, el cual lo enunciamos por su importancia.

Teorema 2.3.4 *La serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1} \quad = \quad z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots + \frac{z^{2k+1}}{2k+1} + \cdots$$

converge absolutamente en el disco abierto unitario centrado en el origen. Además, converge uniformemente en todo subconjunto compacto del disco abierto unitario, determina una función continua y derivable, y

$$\operatorname{arctanh}(z) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}$$

Demostración Ver el Teorema 2.1.5 o el Teorema 2.2.5. ■

Observemos que la serie determinada por el arco tangente hiperbólico es una variante de la serie determinada por el arco tangente. Así que varios de los resultados que obtendremos en el Capítulo 3, Sección 1, serán similares.

2.4. Matrices de Rotación

En esta sección obtendremos las propiedades fundamentales de las matrices de rotación, tanto para las funciones trigonométricas como para las funciones hiperbólicas.

Geométricamente hablando, *rotar un vector* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ distinto de cero, de acuerdo a una rotación de tamaño a, es hacerlo girar alrededor del origen y así obtener otro vector que forma un ángulo a con el vector dado. Las rotaciones pueden verse como transformaciones lineales de la forma:

$$R_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

Más precisamente, tenemos que

$$R_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(a) - y\operatorname{sen}(a) \\ x\operatorname{sen}(a) + y\cos(a) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

es decir, el vector (x, y) al rotar alrededor del origen un ángulo a, se mapea sobre el vector $(x\cos(a) - y\operatorname{sen}(a), x\operatorname{sen}(a) + y\cos(a))$.

Para esta matriz de rotación, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 2.4.1 *Se tiene:*

(i) *El vector* $(1, 0)$ *al rotar un ángulo a alrededor del origen, se mapea en el vector* $(\cos(a), \operatorname{sen}(a))$*, es decir,*

$$R_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \operatorname{sen}(a) \end{pmatrix}$$

(ii) *Si a y b son dos ángulos, entonces* $R_{a+b} = R_a R_b$.

(iii) *Si a es un ángulo, entonces*

$$R_a = \cos(a) \begin{pmatrix} 1 & -\tan(a) \\ \tan(a) & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración
(i) Se sigue inmediatamente de la relación (2.5).
(ii) Tenemos que

$$
\begin{aligned}
R_a R_b &= \begin{pmatrix} \cos(a) & -\operatorname{sen}(a) \\ \operatorname{sen}(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(b) & -\operatorname{sen}(b) \\ \operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) & -\cos(a)\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)\cos(b) \\ \cos(a)\operatorname{sen}(b) + \operatorname{sen}(a)\cos(b) & \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\operatorname{sen}(a+b) \\ \operatorname{sen}(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(ver el Teorema 2.2.2). Así que, tenemos que $R_{a+b} = R_a R_b$.
(iii) Se sigue inmediatamente al factorizar $\cos(a)$ de la matriz R_a. ■

Análogamente, dado un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no cero, podemos "rotarlo hiperbólicamente" un ángulo a al multiplicarlo por la **matriz de rotación hiperbólica**

$$H_a = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \operatorname{senh}(a) \\ \operatorname{senh}(a) & \cosh(a) \end{pmatrix}$$

Esto significa, de nuevo, que

$$H_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cosh(a) + y\operatorname{senh}(a) \\ x\operatorname{senh}(a) + y\cosh(a) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

es decir, el vector (x, y) al "rotarlo hiperbólicamente" un ángulo a alrededor del origen, se mapea en el vector $(x\cosh(a)+y\operatorname{senh}(a), x\operatorname{senh}(a)+y\cosh(a))$.

Para esta nueva matriz de rotación, se tiene el teorema siguiente.

Teorema 2.4.2 *Se tiene que*

(*i*) *El vector* $(1, 0)$ *rotado un ángulo* a *es el vector* $(\cosh(a), \operatorname{senh}(a))$, *es decir,*

$$H_a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(a) \\ \operatorname{senh}(a) \end{pmatrix}$$

(*ii*) *Si* a *y* b *son dos ángulos, entonces* $H_{a+b} = H_a H_b$.

(*iii*) *Si* a *es un ángulo, entonces*

$$H_a = \cosh(a) \begin{pmatrix} 1 & \tanh(a) \\ \tanh(a) & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración
(i) Se sigue inmediatamente de la relación (2.6).
(ii) Tenemos que

$$H_a H_b = \begin{pmatrix} \cosh(a) & \operatorname{senh}(a) \\ \operatorname{senh}(a) & \cosh(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(b) & \operatorname{senh}(b) \\ \operatorname{senh}(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(a)\cosh(b) + \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b) & \cosh(a)\operatorname{senh}(b) + \operatorname{senh}(a)\cosh(b) \\ \operatorname{senh}(a)\cosh(b) + \cosh(a)\operatorname{senh}(b) & \operatorname{senh}(a)\operatorname{senh}(b) + \cosh(a)\cosh(b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(a+b) & \operatorname{senh}(a+b) \\ \operatorname{senh}(a+b) & \cosh(a+b) \end{pmatrix}$$

(ver el Teorema 2.3.2). Por lo tanto, tenemos que $H_{a+b} = H_a H_b$.
(iii) Se sigue inmediatamente al factorizar $\cosh(a)$ de la matriz H_a. ■

2.5. Las funciones arco tangente y arco tangente hiperbólico

Para finalizar el capítulo, en esta sección desarrollaremos algunas desigualdades que satisfacen la función arco tangente y la función arco tangente hiperbólico.

Teorema 2.5.1 *Para cada* $x \in \mathbb{R}$, *con* $0 < x < 1$, *se tiene que*

$$0 < \arctan(x) \leq x \left(\frac{3 - x^2}{3} + \frac{x^4}{5(1 - x^4)} \right).$$

En particular, si $0 < x \leq 1/2$, *entonces se cumple que*

$$\arctan(x) \leq x.$$

Demostración Dado $x \in \mathbb{R}$, con $0 < x < 1$, por el Teorema 2.2.5, se tiene que la serie $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ es convergente, y entonces podemos introducir paréntesis (Teorema 1.1.3) como sigue:

$$
\begin{aligned}
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{4k+1}}{4k+1} - \frac{x^{4k+3}}{4k+3}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{x^2}{4k+3}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{(4k+1)(1-x^2)+2}{(4k+1)(4k+3)}\right).
\end{aligned}
$$

Puesto que $0 < x < 1$, la última igualdad establece que $\arctan(x) > 0$. Pero además, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{(4k+1)(1-x^2)+2}{(4k+1)(4k+3)}\right) \\
&= x \cdot \frac{3-x^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{(4k+1)(1-x^2)+2}{(4k+1)(4k+3)}\right) \\
&\leq x \cdot \frac{3-x^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{4k+3}{(4k+1)(4k+3)}\right) \\
&= x \cdot \frac{3-x^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{4k+1} \left(\frac{1}{(4k+1)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\arctan(x) &\leq x\cdot\frac{3-x^2}{3}+\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}x^{4k+1}\\
&= x\left(\frac{3-x^2}{3}+\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^4\right)^k\right)\\
&= x\left(\frac{3-x^2}{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-x^4}-1\right)\right)\\
&= x\left(\frac{3-x^2}{3}+\frac{x^4}{5(1-x^4)}\right).
\end{aligned}
$$

Resumiendo, tenemos entonces que

$$
0<\arctan(x)\leq x\left(\frac{3-x^2}{3}+\frac{x^4}{5(1-x^4)}\right).
$$

Pero, notemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{3-x^2}{3}+\frac{x^4}{5(1-x^4)}\leq 1 &\iff \frac{3-x^2}{3}\leq 1-\frac{x^4}{5(1-x^4)}\\
&\iff \frac{3-x^2}{3}\leq\frac{5-6x^4}{5(1-x^4)}\\
&\iff 5x^6-15x^4-5x^2+15\leq 15-18x^4\\
&\iff x^2(5x^2+3)\leq 5,
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad es cierta para $0<x\leq 1/2$. Así que, en particular, si $0<x\leq 1/2$, entonces tenemos que

$$
\arctan(x)\leq x. \blacksquare
$$

Hacemos notar que la serie $\arctan(1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ es la serie llamada de **Leibnitz-Gregory**, la cual es convergente debido al Teorema 1.1.2, y es bien conocido que esta serie converge a $\pi/4$.

Definimos para cada $n\geq 0$,

$$
\alpha_n:=\arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) \tag{2.7}
$$

que están bien definidos (debido al Teorema 2.2.5 y al comentario anterior).

Teorema 2.5.2 *Con la notación anterior, tenemos:*

(i) $0 < \alpha_n \leq \dfrac{1}{2^n}$*, para cada* $n > 0$*. En particular,* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$*.*

(ii) $2\alpha_n - \alpha_{n-1} > 0$*, para cada* $n \geq 1$*.*

(iii) La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *es convergente, y*

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Demostración (i): Se sigue inmediatamente del Teorema 2.5.1.
(ii): Desarrollemos para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
2\alpha_n - \alpha_{n-1} &= 2\arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(2\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2k+1}\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2k+1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} - 1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2k+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^5\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \\
&\quad + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^7\left(1 - \frac{1}{2^6}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^9\left(1 - \frac{1}{2^8}\right) + \cdots
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$\begin{aligned}2\alpha_n - \alpha_{n-1} &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3\left(1-\frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^5\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\\ &\quad +\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^7\left(1-\frac{1}{2^6}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^9\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\\ &\quad +\cdots\end{aligned}$$

Puesto que la serie en la relación anterior es convergente, podemos introducir paréntesis para obtener que

$$\begin{aligned}2\alpha_n - \alpha_{n-1} &= \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^3\left(1-\frac{1}{2^2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^5\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\right)\\ &\quad +\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^7\left(1-\frac{1}{2^6}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^9\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\right)\\ &\quad +\cdots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{4k-1}\left(1-\frac{1}{2^{4k-2}}\right)\right.\\ &\qquad \left. -\frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{4k+1}\left(1-\frac{1}{2^{4k}}\right)\right).\end{aligned}$$

Probemos que en la serie anterior, los términos que aparecen entre los paréntesis son positivos.

Para $k \geq 1$ y para $n \geq 1$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
2^{4k+1} > 12k+5 &\implies 2^{4k+2}k + 2^{4k} - 16k - 4 > 2^{4k+2}k - 2^{4k} - 4k + 1 \\
&\implies (2^{4k}-4)(4k+1) > (4k-1)(2^{4k}-1) \\
&\implies \frac{2^{4k}-4}{4k-1} > \frac{2^{4k}-1}{4k+1} \\
&\implies \frac{4(2^{4k-2}-1)}{4k-1} > \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \frac{2^{4k}-1}{4k+1} \\
&\implies \frac{1}{4k-1} \cdot \frac{2^{4k-2}-1}{2^{4k-2}} > \frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \cdot \frac{2^{4k}-1}{2^{4k}} \\
&\implies \frac{1}{4k-1}\left(1 - \frac{1}{2^{4k-2}}\right) > \frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2^{4k}}\right) \\
&\implies \frac{1}{4k-1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{4k-1}\left(1 - \frac{1}{2^{4k-2}}\right) \\
&\qquad > \frac{1}{4k+1}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{4k+1}\left(1 - \frac{1}{2^{4k}}\right).
\end{aligned}
$$

Puesto que la relación $2^{4k+1} > 12k+5$ es cierta, tenemos lo deseado.
(iii): Finalmente, tenemos por (i) que

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} = \alpha_0 < \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \\
&\leq \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + 1.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\frac{\pi}{4} < \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{4} + 1.
$$

$\blacksquare$

El siguiente teorema describe lo que llamaremos la *expansión córdica trigonométrica* de un número real.

Teorema 2.5.3 *Con la notación anterior*

(i) Sea $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión tal que* $c_n \in \{-1, 1\}$*, para* $n \geq 0$*. Entonces, la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$ *es absolutamente convergente.*

(ii) Para cada $x \in [-1, 1]$ *existe una sucesión* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *como en (i) tal que*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n.$$

Demostración (i) Se sigue de la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid c_n\alpha_n \mid = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n.$$

(ii) Sea $x \in [-1, 1]$ arbitrario. Definimos $x_0 := x$, y sea

$$c_0 := \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \geq 0, \\ -1 & \text{si } x_0 < 0 \end{cases}$$

y definimos $x_1 := x_0 - c_0\alpha_0$.
Por recurrencia, supónganse definidos $c_0, \ldots, c_{n-1}$ en el conjunto $\{-1, 1\}$, y números reales $x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n$ tales que

$$x_{i+1} = x_i - c_i\alpha_i,$$

para cada $0 \leq i \leq n - 1$. Definimos

$$c_n := \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \geq 0, \\ -1 & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$$

y sea

$$x_{n+1} := x_n - c_n\alpha_n \tag{2.8}$$

Así hemos construído una sucesión $\{c_n\}_{n\geq 0}$ de elementos de $\{-1,1\}$, y una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de números reales, ambas satisfaciendo la ecuación (2.8), para cada $n \geq 0$. Sea $\{s_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k\alpha_k = \sum_{k=0}^{n}(x_k - x_{k+1}) \\ &= (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n+1}) \\ &= x_0 - x_{n+1}, \end{aligned}$$

y de aquí que, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es convergente con

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\alpha_n = x_0 - \lim_{n\to\infty} x_{n+1}.$$

Puesto que $x_0 = x$, la demostración finalizará si probamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Para esto, probemos por inducción que $\mid x_{n+1} \mid \leq \alpha_n$, para cada $n \geq 0$. Si $x_0 \geq 0$, entonces $c_0 = 1$, y

$$-\alpha_0 \leq x_1 = x_0 - \alpha_0 \leq 1 - \alpha_0 = 1 - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} = \alpha_0;$$

si $x_0 < 0$, entonces $c_0 = -1$, y

$$-\alpha_0 = -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} - 1 = \alpha_0 - 1 \leq \alpha_0 + x_0 = x_1 \leq \alpha_0.$$

Por lo tanto, en cualquier caso, obtenemos que $\mid x_1 \mid \leq \alpha_0$. Ahora, supóngase cierta la desigualdad $\mid x_{n+1} \mid \leq \alpha_n$, con $n \geq 0$. Entonces, si $x_{n+1} \geq 0$, se tiene que $c_{n+1} = 1$, y por el Teorema 2.5.2, (ii), obtenemos que

$$-\alpha_{n+1} \leq x_{n+2} = x_{n+1} - \alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+1};$$

si $x_{n+1} < 0$, entonces $c_{n+1} = -1$, y similarmente tenemos que

$$-\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq x_{n+2} = x_{n+1} + \alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

De nuevo, en cualquier caso, obtenemos que $\mid x_{n+2} \mid \leq \alpha_{n+1}$. Por lo tanto, hemos obtenido que $\mid x_{n+1} \mid \leq \alpha_n$, para cada $n \geq 0$, y se tiene lo deseado. ■

Hemos obtenido que la serie determinada por el arco tangente hiperbólico es una variante de la serie del arco tangente. Así que varios de los resultados que obtendremos en seguida serán similares a los anteriores.

Teorema 2.5.4 *Para cada $x \in \mathbb{R}$, con $0 < x < 1$, se tiene que*

$$x < \operatorname{arctanh}(x) \leq x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right).$$

En particular, si $0 < x \leq 1/2$, entonces se cumple que

$$x < \operatorname{arctanh}(x) \leq \frac{10x}{9}.$$

Demostración Tenemos para $0 < x < 1$ que

$$\begin{aligned} x < \operatorname{arctanh}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + x\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \\ &\leq x + \frac{x}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \left(x^2\right)^k = x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)\right) \\ &= x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right). \end{aligned}$$

En resumen, tenemos que

$$x < \operatorname{arctanh}(x) \quad \leq \quad x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\right).$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \leq \frac{10}{9} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \leq \frac{1}{9} \\ &\Longleftrightarrow \quad 9x^2 \leq 3 - 3x^2 \Longleftrightarrow 12x^2 \leq 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 \leq \frac{1}{4}\ , \end{aligned}$$

donde la relación $x^2 \leq 1/4$, se cumple para $0 < x < 1/2$. Por lo tanto, si $0 < x < 1/2$, entonces tenemos que

$$x < \operatorname{arctanh}(x) \leq \frac{10x}{9}. \blacksquare$$

Definimos

$$\beta_0 := +\infty$$

y para cada $n \geq 1$

$$\beta_n := \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2^n}\right) \tag{2.9}$$

los cuales están bien definidos (debido a los Teoremas 2.3.4 y 2.5.4).

Teorema 2.5.5 *Con la notación anterior, tenemos lo siguiente:*

(*i*) $\dfrac{1}{2^n} < \beta_n \leq \dfrac{10}{9 \cdot 2^n}$, *para cada* $n > 0$. *En particular,* $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

(*ii*) *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ *es convergente, y*

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq \frac{10}{9}.$$

Demostración (i) Se sigue inmediatamente del Teorema 2.5.4.
(ii) Por (i), tenemos que para cada $n \geq 1$

$$\frac{1}{2^n} < \beta_n \leq \frac{10}{9 \cdot 2^n}.$$

De aquí que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad < \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{9 \cdot 2^n} = \frac{10}{9}. \blacksquare$$

El siguiente teorema básicamente es el mismo que el Teorema 2.5.3, sin embargo lo enunciamos para este caso.

Teorema 2.5.6 *Con la notación anterior*

(*i*) *Sea* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión tal que* $c_n \in \{1, -1\}$, *para* $n \geq 0$. *Entonces, la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\beta_n$ *es absolutamente convergente.*

(*ii*) *Para cada* $x \in [-1, 1]$ *existe una sucesión* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *como en* (*i*) *tal que*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \beta_n.$$

Demostración Es inmediato al observar que toda serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \beta_n$ establecida aquí es una de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n \alpha_n$ como en el Teorema 2.5.3. ■

Capítulo 3

Algoritmos Córdicos

3.1. Introducción

Los algoritmos córdicos describen métodos con los que se pueden evaluar las funciones trigonométricas, hiperbólicas y trascendentales, con una buena precisión. La palabra **"CORDIC"** es un acrónimo en inglés que significa **CO**ordinate **R**otation on **DI**gital **C**omputers. Los algoritmos córdicos fueron desarrollados por Jack E. Volder en 1959 para evaluar funciones trigonométricas. Luego, fueron extendidos por J. Walther en 1971 para evaluar otras funciones trascendentales.

La idea detrás de los algoritmos córdicos es la de rotar un vector un ángulo dado. Cuando el vector es unitario, al rotarlo un cierto ángulo α obtenemos con facilidad el seno y el coseno de α. Recíprocamente, al determinar qué ángulo se requiere para hacer que un vector, (x, y), —suponiendo que x y y no son ambos cero—, tras una rotación se convierta en el vector unitario $(1, 0)$, podemos también calcular el ángulo que se forma en un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es y y cuyo cateto adyacente es x.

Un procedimiento análogo al de las funciones trigonométricas, va a permitirnos calcular las funciones hiperbólicas, el logaritmo natural y la función exponencial. Y, mediante un uso inteligente de los algoritmos córdicos, tendremos también la posiblidad de calcular raíces cuadradas.

3.2. Cálculo de funciones trigonométricas

3.2.1. Seno y coseno

Dado un número real $\alpha \in [-1, 1]$, es posible obtener la expansión córdica de α de acuerdo con el teorema 2.5.3, es decir, existe una serie sucesión $c_n \in \{-1, 1\}$, para $n \geq 0$ tal que:

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_n.$$

donde:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = tan^{-1} \frac{1}{2^n} \tag{3.1}$$

Al vector unitario $(1, 0)$ lo vamos a rotar un ángulo α, al hacer esto, se obtendremos el vector $(\cos(a), \mathrm{sen}(a))$.

Ahora bien, no vamos a realizar una rotación de acuerdo al ángulo α, sino que vamos a realizar toda una infinidad de rotaciones de acuerdo a los sumandos de la serie 3.1. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} R_\alpha &= R_{\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} R_{c_i \alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^{\infty} \cos(c_i \alpha_i) \begin{pmatrix} 1 & -\tan(c_i \alpha_i) \\ \tan(c_i \alpha_i) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sabemos que para cada $i : c_i \in \{1, -1\}$ (por el Teorema 2.5.3) y por propiedades de las funciones trigonométricas, se tiene

$$\begin{aligned}
R_x &= \prod_{i=1}^{\infty} \cos(c_i\alpha_i) \begin{pmatrix} 1 & -\tan(c_i\alpha_i) \\ \tan(c_i\alpha_i) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \cos(\alpha_i) \begin{pmatrix} 1 & -c_i\tan(\alpha_i) \\ c_i\tan(\alpha_i) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\prod_{i=1}^{\infty} \cos(\alpha_i)\right) \prod_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_i}{2^i} \\ \frac{c_i}{2^i} & 1 \end{pmatrix} \\
&= K \prod_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{c_i}{2^i} \\ \frac{c_i}{2^i} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donde K es una constante que posteriormente calcularemos.

Con el desarrollo anterior es posible ahora obtener un algoritmo para calcular funciones trigonométricas. Consideremos la demostración del teorema 2.5.3, que nos guiará para la creación del algoritmo. Como es imposible calcular toda la serie de la expansión córdica de α, tomemos a n como un número natural y calculemos los primeros n términos de la expansión:

$z := \alpha$;
para i de 0 a n hacer
{
si $(z \geq 0)$ entonces $s := 1$ en otro caso $s := -1$;
$(x, y, z) :=(x - s \;\; y >> i,\, y + s \;\; x >> i,\, z - s\alpha_i)$
}.

Dado un vector (x, y) y un ángulo α, haremos $z := \alpha$ y escribiremos, por comodidad, (x, y, z). De acuerdo a la demostración, calculamos a los $\{c_i\}$ de manera implícita (al preguntar si $z \geq 0$) y, de acuerdo a su valor, hacemos una rotación de un ángulo α_i sobre el vector (x, y) y corregimos el valor de z adecuadamente.
Al terminar el proceso, obtenemos, aproximadamente:

$$(x, y, \alpha) \longrightarrow \left(\frac{1}{K}\left(x\cos(\alpha) - y\mathrm{sen}(\alpha)\right), \frac{1}{K}\left(y\cos(\alpha) + x\mathrm{sen}(\alpha)\right), 0\right)$$

El valor de la constante K, puede ser calculado al considerar el vector $(x, y, \alpha) = (1, 0, 0)$. Al ejecutar el algoritmo anterior, se obtiene:

$$(1,0,0) \longrightarrow \left(\frac{1}{K},0,0\right)$$

y con sólo tomar el recíproco de x, podemos obtener el valor de K (que es aproximadamente 0.607).

Una vez que obtenemos el valor de K, podemos mejorar el algoritmo para calcular el $\operatorname{sen}(a)$ y el $\cos(a)$. Consideramos el vector $(x,y,z) = (K,0,a)$ que, al ejecutar el algoritmo, nos dará como resultado

$$(K,0,a) \longrightarrow (\cos(a), \operatorname{sen}(a), 0)\,.$$

3.2.2. Arco tangente

Para el cálculo de $\arctan(a)$, podríamos hacer tender a cero el valor de y en lugar del valor de z. Llevando y a cero, vamos transformando al vector (x,y) en el vector $(1,0)$ y vamos sumando los ángulos que hemos calculado para las rotaciones, en la variable z. El pseudocódigo del algoritmo inverso es como sigue:

para i de 0 a n hacer
{
si $(y \geq 0)$ entonces $s := 1$ en otro caso $s := -1$;
$(x,y,z) :=(x + s \;\; y >> i,\; y - s \;\; x >> i,\; z + s\alpha_i)$
}.

Empezando con el vector (x,y,z) y haciendo tender y a cero, al usar el algoritmo inverso obtenemos las cantidades

$$(x,y,z) \longrightarrow \left(\frac{1}{K}\sqrt{x^2-y^2}, 0, z + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right).$$

3.3. Funciones Hiperbóloicas

Las funciones hiperbólicas (senh, cosh, etc.) son similares a las funciones trigonométricas como podemos observar en el Capítulo 2, Secciones 2.2-2.4

. Por esta analogía, se usa la notación H_a como la matriz de la rotación y representamos a a usando el conjunto de elementos $\alpha_i = \text{arctanh}(2^{-i})$ para $i = 1, \ldots, n$. Notemos que para las funciones hiperbólicas, a_0 es infinito.

Dado el cambio en los α_i's, ¿podemos representar todavía cualquier ángulo a dentro del dominio de convergencia de la misma manera que lo hicimos para las funciones trigonométricas? Desgraciadamente, la respuesta es ¡no! Walther señala esa repetición ocasional del término que hace a la representación converger en el caso hiperbólico. Repitiendo los términos en la forma

$$\alpha_4,\ \alpha_{13},\ \alpha_{40},\ \alpha_{121}, \ldots,\ \alpha_k,\ \alpha_{3k+1}$$

hace el truco.

Salvo para los términos repetidos y algunos cambios de signo, los algoritmos para las funciones hiperbólicas son idénticas a las funciones trigonométricas. La Lista 1, que se encuentra en la Sección 3.6 más adelante, muestra esto con detalle.

Para las funciones hiperbólicas, iniciamos con el vector (x, y, z) y entonces mandamos z a cero. Esto nos da las cantidades

$$(x, y, z) \longrightarrow \left(\frac{1}{K} \left(x \cosh(z) + y \text{senh}(z) \right), \frac{1}{K} \left(y \cosh(z) + x \text{senh}(z) \right), 0 \right).$$

Empezando con (x, y, z) y tendiendo y a cero nos da las cantidades

$$(x, y, z) \longrightarrow \left(\frac{1}{K} \sqrt{x^2 - y^2}, 0, z + \text{arctanh} \left(\frac{y}{x} \right) \right).$$

Para las hiperbólicas, $K \approx 1{,}21$.

Algunos casos interesantes incluyen la función exponencial, raíz cuadrada, y logaritmo natural. Para el caso de la función exponencial obtenemos las cantidades

$$(K, K, a) \longrightarrow (e^a, e^a, 0),$$

mientras que para la raíz cuadrada y el logaritmo se tienen las cantidades

$$\left(a+\frac{K^2}{4}, a-\frac{K^2}{4}, \frac{1}{2}\ln\left(\frac{K^2}{4}\right)\right) \longrightarrow \left(\sqrt{a}, 0, \frac{1}{2}\ln(a)\right).$$

3.4. Cálculo de las Constantes

El algoritmo para calcular las funciones trigonométricas e hiperbólicas requiere de varias constantes previamente calculadas. Estas incluyen la constante K, para las funciones trigonométricas e hiperbólicas, dadas respectivamente por

$$\left\{\arctan(1), \arctan\left(\frac{1}{2}\right), \arctan\left(\frac{1}{4}\right), \ldots\right\}$$

y

$$\left\{\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{4}\right), \ldots\right\}$$

La Lista 1 ilustra esta situación (ver Sección 3.6 más adelante).

El programa, escrito en C, usa aritmética del punto fijo para todos los cálculos. Todas las constantes y variables usadas para calcular las funciones son declaradas como tipo *long*. El código supone que un *long* es por lo menos 32 bits. Representamos los números en el rango $-4 \leq x < 4$; ya que esto nos permite representar a e como un número de punto fijo. El bit de orden superior es para el signo. El bit de orden inferior *Bit-fracción* (una constante definida como 29) conserva la parte fraccional del número. El resto de los bits entre el bit del signo y el bit de la parte fraccional contiene a la parte entera del número.

La Figura muestra el formato del punto fijo en forma gráfica.

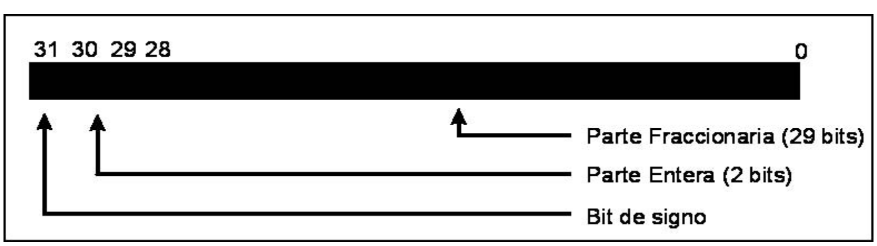

Figura: Formato de punto fijo

Se pueden usar las series de potencias

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \qquad \text{para } x^2 \leq 1$$
$$\operatorname{arctanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots \qquad \text{para } x^2 < 1$$

para calcular el incremento de los ángulos α_i. ¿Cómo sabemos el número de términos necesario para evaluar arctan y arctanh a 32 bits de precisión? Primero consideremos el valor de x para el cual $\arctan(x) = x$ a 32 bits de precisión. Un teorema de análisis numérico establece que para una suma alternante donde los valores absolutos de los términos decrecen monotónamente, el error es menor que el valor absoluto del primer término abandonado. - Resolviendo la ecuación $x^3/3 = 2^{-32}$ para x, obtenemos $x = \sqrt[3]{6 \cdot 2^{-11}}$; por lo tanto, para $i \geq 11$, $\arctan(2^{-i}) = 2^{-i}$ con 32 bits de precisión. Para las potencias superiores a dos, necesitamos resolver la relación $2^{-in}/n = 2^{-32}$ para n y para cada uno de los casos $i = 1, \ldots, 10$. No intentamos el cálculo para $i = 0$. La serie para $\arctan(1)$ converge muy lentamente; aún después de 500 términos, el tercer dígito todavía está cambiando. Afortunadamente sabemos que la respuesta es $\pi/4$. Calcular el resto no es mucho trabajo. El arreglo de los términos de la serie determinan los detalles.

Como de costumbre, el arctanh es más perverso. No es una serie alternada y no se tienen las condiciones del teorema usado anteriormente. Por lo tanto, se considera al segundo término del $\operatorname{arctanh}(1/2)$ abandonado, ya que es menor que $1/4$ del primer término abandonado debido a que la serie incluye sólo las otras potencias de dos. Todos los otros términos abandonados pueden no tener efecto en el 33-vo bit. La serie para los otros argumentos, $1/4$, $1/8$,..., aún converge más rápidamente. Por lo tanto, el número de términos calculados para arctan trabaja bien para arctanh con 32-bits de exactitud.

Antes de calcular la serie de potencias, todavía se necesita calcular los coeficientes $1/k$, para cada término $k = 1, 3, 5, \ldots, 27$. Completamos el arreglo de coeficientes *long* a [28] con índices impares al llamar a la rutina *Reciprocal*, el cual toma dos argumentos y regresa un *long*. El primer argumento es el entero para el recíproco deseado. El segundo especifica la precisión deseada para la parte fraccional del resultado. *Reciprocal* usa algo simple como puede ser la restauración de la división; es el algoritmo conocido para la división larga. Los elementos del arreglo a con índices pares obtienen el *OL* ya que no hay términos en la serie de potencias con exponentes par.

Con esto, todo está listo para completar el arreglo *atan[fractionBits + 1]* y *atanh[fractionBits + 1]*.

La rutina *Poly2* evalúa la serie de potencias para el número especificado de términos para la potencia específica de dos usando la regla de Horner. Los coeficientes vienen del arreglo a, el cual se ha completado cuidadosamente. La regla de Horner es el método recomendado por la evaluación de polinomios. Un polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ puede volverse a escribir en la forma

$$(\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0.$$

Esta simple fórmula recursiva evalúa el polinomio con n multiplicaciones y n sumas. Calculamos la escala de constantes K al usar el método explicado anteriormente; en el programa lo llamamos *XOC* y *XOH*, para las constantes trigonométricas e hiperbólicas, respectivamente. Se muestra en la Lista 2, la cual aparece en la Sección 3.6, lo que el Programa produce en este sentido.

Las rutinas *Circular*, *InvertCircular*, *Hiperbolic*, e *InvertHyperbolic* son las aplicaciones de C de los algoritmos descritos anteriormente. Todos toman como argumentos los valores iniciales para (x, y, z); dejan sus resultados en las variables globales X, Y y Z. Considerando su versatilidad y la amplia gama de funciones que calculan, estas rutinas son compactas y elegantes.

3.5. Programa

En esta sección mostramos el programa que se ha mencionado en las secciones anteriores. A través de la Lista 1 y la Lista 2 se presentan los resultados obtenidos del programa.

Listado 1

```
#define    fractionBits 29
#define    longBits 32
```

```
#define      One {010000000000 >> 1}
#define     HalfPi {014441766521 >> 1}

long     XOC, XOH, XOR;
long     OneOverE, E;
long     HalfLnXOR;

unsigned terms[11] = {0, 27, 14, 9, 7, 5, 4, 4, 3, 3, 3};
static long a[28], atan[fractionBits+1], atanh[fractionBits+1], X, Y, Z;

#define Delta (n,Z) (Z >= 0) ? (n) : -(n)
#define abs(n) ((n>= 0) ? (n) : -(n))

long Reciprocal(unsigned n, unsigned k)
{
    unsigned i, a=1; long r=0;
    for (i=0; i<=k; ++i)
    {
        r += r;
        if (a>=n)
        {
            r += 1;
            a -= n;
        }
        a += a;
    }
    return (a>=n ? r+1 : r)
}

long ScaledReciprocal(long n, unsigned k)
{
    long a, r=0;
    unsigned i;
    a = 1L<<k;
    for (i=0; i<=k; ++i)
    {
        r += r;
        if (a>=n)
        {
```

```
        r += 1;
        a -= n;
      }
      a += a;
    }
    return(a>=n ? r+1 : r);
}

long Poly2(int log, unsigned n)
{
    long r=0; int i;
    for (i=n; i>=0; –i)
      r = (log< 0 ? r>>-log : r<<log)+a[i];
    return(r);
}

void WriteFraction(long n)
{
    unsigned short i, low, digit; unsigned long k;
    putchar(n< 0 ? '-' : ' '); n = abs(n);
    putchar((n>>fractionBits) + '0'); putchar('.');
    low = k = n << (longBits - fractionBits);
    k >>= 4;
    for (i=1; i<= 8; ++i)
    {
      digit = (k *= 10L) >> (longBits-4);
      low = (low & 0xf) * 10;
      k += ((unsigned long) (low>> 4)) - ((unsigned long) digit << (longBits-
4));
      putchar(digit+'0');
    }
}

void WriteVarious(long n)
{
    WriteFraction(n);
    printf("0x %08lx 0 %011lo\n", n, n);
}
```

```
void WriteRegisters(void)
{
    printf(”X : ”); WriteVarious(X);
    printf(”Y : ”); WriteVarious(Y);
    printf(”Z : ”); WriteVarious(Z);
}

void Circular(long x, long y, long z)
{
    int i;
    X = x; Y = y; Z = z;
    for (i=0; i<=fractionBits; ++i)
    {
        x = X >>i; y = Y>>i; z = atan[i];
        X -= Delta(y, Z);
        Y += Delta(x, Z);
        Z -= Delta(z, Z);
    }
}

void InvertCircular(long x, long y, long z)
{
    int i;
    X = x; Y = y; Z = z;
    for (i=0; i<=fractionBits; ++i)
    {
        x = X >>i; y = Y>>i; z = atan[i];
        X -= Delta(y, -Y);
        Z -= Delta(z, -Y);
        Y += Delta(x, -Y);
    }
}

void Hyperbolic(long x, long y, long z)
{
    int i;
    X = x; Y = y; Z = z;
    for (i=1; i<=fractionBits; ++i)
```

```
    {
        x = X >>i; y = Y>>i; z = atanh[i];
        X += Delta(y, Z);
        Y += Delta(x, Z);
        Z -= Delta(z, Z);
        if ((i == 4) || (i == 13))
        {
            x = X >>i; y = Y>>i; z = atanh[i];
            X += Delta(y, Z);
            Y += Delta(x, Z);
            Z -= Delta(z, Z);
        }
    }
}

void InvertHyperbolic(long x, long y, long z)
{
    int i;
    X = x; Y = y; Z = z;
    for (i=1; i<=fractionBits; ++i)
    {
        x = X >>i; y = Y>>i; z = atanh[i];
        X += Delta(y, -Y);
        Z -= Delta(z, -Y);
        Y += Delta(x, -Y);
        if ((i == 4) || (i == 13))
        {
            x = X >>i; y = Y>>i; z = atanh[i];
            X += Delta(y, -Y);
            Z -= Delta(z, -Y);
            Y += Delta(x, -Y);
        }
    }
}

void Linear(long x, long y, long z)
{
    int i;
```

```
    X = x; Y = y; Z = z; z = One;
    for (i=1; i<=fractionBits; ++i)
    {
        X >>= 1; z >>= 1;
        Y += Delta(x, Z);
        Z -= Delta(z, Z);
    }
}

void InvertLinear(long x, long y, long z)
{
    int i;
    X = x; Y = y; Z = z; z = One;
    for (i=1; i<=fractionBits; ++i)
    {
        Z -= Delta(z >>= 1, -Y);
        Y += Delta(x >>= 1, -Y);
    }
}

int main(void)
{
    int i; long r;
    for (i=0; i <= 13; ++i)
    {
        a[2*i] = 0;
        a[2*i+1] = Reciprocal(2*i+1, fractionBits);
    }
    for (i=0; i <= 10; ++i)
        atanh[i] = Poly2(-i, terms[i]);
    atan[0] = HalfPi/2;
    for (i=1; i <= 7; ++i)
        a[4*i-1] = -a[4*i-1];
    for (i=1; i <= 10; ++i)
        atan[i] = Poly2(-i, terms[i]);
    for (i=11; i <=fractionBits; ++i)
        atan[i] = atanh[i] = 1L <<(fractionBits-i);
    printf("\natanh(2^-n)\n");
```

```
    for (i=1; i <= 10; ++i)
    {
        printf(" %2d ", i);
        WriteVarious(atanh[i]);
    }
    r = 0;
    for (i=1; i <=fractionBits; ++i)
        r += atanh[i];
    r += atanh[4] + atanh[13];
    printf(radius of convergence"); WriteFraction(r);
    printf("\n\natan(2^n)\ n");
    for (i=0; i <= 10; ++i)
    {
        printf(" %2d ", i);
        WriteVarious(atan[i]);
    }
    r = 0;
    for (i=1; i <=fractionBits; ++i)
        r += atan[i];
    printf(radius of convergence"); WriteFraction(r);
    printf("\n\n ———-Circular Functions———-\n");
printf("Grinding on [1, 0, 0]\n");
Circular(One, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\n K: "); WriteVarious(XOC= ScaledReciprocal(X, fractionBits));
printf("\nGrinding on [K, 0, 0]\n");
Circular(XOC, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [K, 0, pi/6] − > [0,86602540, 0,50000000, 0]\n");
Circular(XOC, 0L, HalfPi/3L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [K, 0, pi/4] − > [0,70710678, 0,70710678, 0]\n");
Circular(XOC, 0L, 2L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [K, 0, pi/3] − > [0,50000000, 0,86602540, 0]\n");
Circular(XOC, 0L, 2L*(HalfPi/3L)); WriteRegisters();
    printf("\n ———-Inverse Functions———- \");
printf("Grinding on [1, 0, 0]\n");
InvertCircular(One, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [1, 1/2, 0 − > [1,84113394, 0, 0,46364761]\n");
InvertCircular(One, One/2L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [2, 1, 0] − > [3,68226788, 0, 0,46364761]\n");
```

```
InvertCircular(One*2L, One, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [1, 5/8, 0] − > [1,94193815, 0, 0,55859932]\n");
InvertCircular(One, 5L*(One/8L), 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [1, 1, 0] − > [2,32887069, 0, 0,78539816]\n");
InvertCircular(One, One, 0L); WriteRegisters();
    printf("\n ———-Hyperbolic Functions———- \");
printf("Grinding on [1, 1, 0]\n");
Hyperbolic(One, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\n K: "); WriteVarious(XOH = ScaledReciprocal(X, fractionBits));
printf(R: "); XOR = XOH>> 1; Linear(XOR, 0L, XOR);
WriteVarious(XOR= Y);
printf("\nGrinding on [K, 1, 0]\n");
Hyperbolic(XOH, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [K, 0, 1] − > [1,54308064, 1,17520119, 0]\n");
Hyperbolic(XOH, 0L, 0ne); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [K, K, -1] − > [0,36787944, 0,36787944, 0]\n");
Hyperbolic(XOH, XOH, -One); WriteRegisters();
OneOverE = X;
printf("\nGrinding on [K, K, 1] − > [2,71828183, 2,71828183, 0]\n");
Hyperbolic(XOH, XOH, One); WriteRegisters();
E = X;
    printf("\n ———-Inverse Functions———- \n");
printf("Grinding on [1, 0, 0]\");
InvertHyperbolic(One, 0L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [1/e + 1, 1/e - 1, 0] − > [1,00460806, 0, −0,50000000]\n");
InvertHyperbolic(OneOverE+One, OneOverE-One, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [e + 1, e - 1, 0] − > [2,73080784, 0, 0,50000000]\n");
InvertHyperbolic(E+One, E-One, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on (1/2)*ln(3) − > [0,71720703, 0, 0,54930614]\n");
InvertHyperbolic(One, One/2L, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on [3/2, -1/2, 0] − > [1,17119417, 0, −0,34657359]\n");
InvertHyperbolic(One+(One/2L), -(One/2L), 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on sqrt(1/2) − > [0,70710678, 0, 0,15802389]\n");
InvertHyperbolic(One/2L+XOR, One/2L-XOR, 0L); WriteRegisters();
printf("\nGrinding on sqrt(1) − > [1,00000000, 0, 0,50449748]\n");
InvertHyperbolic(One+XOR, One-XOR, 0L); WriteRegisters();
HalfLnXOR = Z;
printf("\nGrinding on sqrt(2) − > [1,41421356, 0, 0,85117107]\n");
```

```
InvertHyperbolic(One*2L+XOR, One*2L-XOR, 0L);
WriteRegisters();
printf("\nGrinding on sqrt(1/2), ln(1/2)/2 -> [0,70710678, 0, -0,34657359]\n");
InvertHyperbolic(One/2L+XOR, One/2L-XOR, -HalfLnXOR);
WriteRegisters();
printf("\nGrinding on sqrt(3)/2, ln(3/4)/2 -> [0,86602540, 0, -0,14384104]\n");
InvertHyperbolic((3L*One/4L)+XOR, (3L*One/4L)-XOR, -HalfLnXOR);
WriteRegisters();
printf("\nGrinding on sqrt(2), ln(2)/2 -> [1,41421356, 0, 0,34657359]\n");
InvertHyperbolic(One*2L+XOR, One*2L-XOR, -HalfLnXOR);
    WriteRegisters();
    return 0;
}
```

Listado 2

atanh(2ˆn)

1. 0.54930614 0x1193ea7a 002144765172
2. 0.25541281 0x082c577d 001013053575
3. 0.12565721 0x04056247 000401261107
4. 0.06258157 0x0200ab11 000200125421
5. 0.03126017 0x01001558 000100012530
6. 0.01562627 0x008002aa 000040001252
7. 0.00781265 0x00100055 000020000125
8. 0.00390626 0x0020000a 000010000012
9. 0.00195312 0x00100001 000004000001
10. 0.00097656 0x00080000 000002000000

radius of convergence 1.11817300

atan(2ˆn)

0. 0.78539816 0x1921fb54 003110375524

1. 0.46364760 0x0ed63382 001665431602

2. 0.24497866 0x07d6dd7e 000765556576

3. 0.12435499 0x03fab753 000376533523

4. 0.06241880 0x01ff55bb 000177652673

5. 0.03123983 0x00ffeaad 000077765255

6. 0.01562372 0x007ffd55 000037776525

7. 0.00781233 0x003fffaa 000017777652

8. 0.00390622 0x001ffff5 000007777765

9. 0.00195312 0x000ffffe 000003777776

10. 0.00097656 0x0007ffff 000001777777

radius of convergence 1.74328660

——————— Circular Function ———————-
K: 0.60725293 0x136e9db3 002333516663

——————— Hyperbolic Function ———————-
K: 1.20749708 0x26a3d0ed 004650750355
R: 0.36451229 0x0baa15b1 001352412661

Conclusiones

Al final de este trabajo lo que se puede concluir es lo siguiente:

- Se presentan las demostraciones de los teoremas principales: 2.5.1, 2.5.2, 2.5.3 para las funciones trigonométricas y 2.5.4, 2.5.5, 2.5.6 para las funciones hiperbolicas, las cuales no han encontrado su demostración en otros trabajos.

- Los algoritmos córdicos son una rutina relativamente sencilla y compacta.

- Facilitan el cálculo de las funciones trigonométricas e hiperbólicas, debido a su eficiencia y precisión.

- Se puede usar como base de un sistema de aritmética de precisión extendida.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M., *Análisis Matemático*, Segunda Edición, Editorial Reverté, S. A., 1976.

[2] Cochran, D. S., *Algoritms and Accuracy in the HP*-35, Hewlett-Packard Journal, pp. 10-11, June 1972.

[3] Nave, R., *Implementation of Transcendental Functions on a Numerics Processor*, Microprocessing and Microprogramming, vol. 11, num 3-4, pp. 221-225, March-April 1983.

[4] Volder, J. E., *The Cordic Trigonometric Computing Technique*, IRETransactions Electronic Computers, vol. EC-8, pp. 330-334, Semptember 1959.

[5] Walther, J. S., *A Unified Algorithm for Elementary Functions*, In 1971 Proceedings of the Joint Spring Computer Conference, pp. 379-385, 1971.

[6] Yuen, A. K., *Intel's Floating-Point Processors*, Electro/88 Conference Record, pp.48/5/1-7, 1988.