



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura
Unidad Ticomán

**ESPACIOS DE HILBERT Y ESTABILIDAD DE
FLUJOS SOBRE UNA ESFERA.**

TESIS QUE PARA OBTENER
EL GRADO EN LICENCIATURA EN
INGENIERÍA,
EN GEOFÍSICA

PRESENTA:
Guadalupe Araceli Vargas de la Cerda.

Director de Tesis:
Dr. N. Yuri Skiba.

Agradecimientos

El sentido primordial de cuanto se realiza en la vida en un ejercicio de la mente y el sentido común que nos insta a concluir proyectos, los cuales adelantan pequeños pasos en nuestra andar y desarrollo como profesionistas.

Dicho lo anterior, debo un especial agradecimiento al Centro de Ciencias de la Atmosf era, UNAM, CONACYT-SEMARNAT, dichas instituciones que permitieron el desarrollo del proyecto que con orgullo presento en su nombre, pero le agradezco con especial atención al Dr. Yuri Skiba que brindo su paciente e incondicional apoyo a todos los requerimientos que hicieron posible este trabajo, pero ante todo por ser mi mentor y guía en el transcurso del tiempo.

Al Mtro. Ramón Gómez Aguilar por su amable atención en dudas e inquietudes, le ofrendo un especial agradecimiento por inculcar en mí el amor a la ciencia, con la misma pasión que el dedica cada día de su vida en transmitir las bellas enseñanzas de la física y matemáticas en sus alumnos.

A la Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Ticomán, a sus profesores y empleados que abrigaron no solo a una alumna sino a un ser humano con ilusiones y aspiraciones que le acompañaron con fe y cariño en mis años de estudiante.

A mis padres que padecieron mis inquietudes y completaron sin desmayo cada proceso de la formación de mi persona como profesionista así como la más importante de ellas, concluyeron con éxito la formación de un ser humano.

A mí hermana que sostuvo mis lagrimas y quimeras y no se derrumbó ante las desdichas, a la que siempre confío en mí incondicionalmente y que con sus detalles encendieron mis luces apagadas que han hecho que de la tristeza nazca la alegría y con su amor, de la esperanza la fe.

A ti mi sol de medianoche que entre noches y días alumbras cada paso de mi vida, que con tu amor has inspirado todos los detalles que embelecen el leve estadio que he permanecido contigo.

Mi Estrella de la mañana que que tan fiel observancia ha tenido a mis estadios y que con dulce paciencia dejaste la puerta abierta en donde yo solte mi paso a los laberintos de mi mente, pero ante todo siempre será tu fe la que me devuelva de las intermitencias de duda que mi alma alberga.

A científicos y artistas que con su obras siempre hicieron ideas nobles y bellas que han cambiado la faz del tierra en el esplendor de conquistar la mente.

A mi dulce y amado Dios que como compañía y sombra de mis pasos yaces recondito en los umbrales de oscuridad y luz que levantaron mis deseos de rendir a tí principalmente este homenaje.

Guadalupe Araceli Vargas de la Cerda

Resumen

En el presente trabajo se introduce una derivada de grado real y una familia de espacios de Hilbert de funciones suaves H^R definidas sobre una esfera unitaria S . Para este caso se escoge los espacios de Hilbert por tener las características necesarias que modelan una esfera unitaria.

Los polinomios esfericos son funciones que definen nuestra función de onda y que son resueltos con los harmonicos esféricos, es por esta razón que los primeros dos capítulos explican detalladamente las características de cada cual y el porque estos fueron elegibles para trabajar dentro de un espacio de Hilbert que a su vez permite definir las coordenadas de un sistema unitario.

Un polinomio esférico de grado n representa una combinación lineal de polinomios esféricos homogéneos de grado k ($0 \leq k \leq n$). En su turno cada polinomio homogéneo de grado k es una combinación lineal de los armónicos esféricos $Y_k^m(x)$ de grado n y número zonal m ($-k \leq m \leq k$).

Un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido en un espacio de Hilbert genera una norma $\|\cdot\|$.

El parámetro r , de la familia de los espacios de Hilbert $H^r(S)$ determina el nivel de suavidad de funciones. El espacio de Hilbert esta asociado con un armónico esférico que esta asociado a un espacio, por lo que existe una relación directa y lineal entre cada grado de polinomio con un espacio o subespacio del mismo grado. El grado de cada armónico determinará la suavidad con que la función de onda puede encontrarse dentro de nuestro espacio. Por lo que existen relaciones de ortogonalidad en los polinomios de Legendre que nos permiten hacer la relacion entre el espacio de Hilbert y el armónico esférico.

Se estudian las principales relaciones entre dichos espacios, y se estima la rapidez de la convergencia de la serie de Fourier de los armónicos esféricos para una función de

$H^r(S)$. En este capítulo se estudia la rapidez de la convergencia de la serie de Fourier la cual determinará que tan suave es nuestro espacio y principalmente que número de truncación es mejor para un espacio dado, ya que la mayoría de los problemas implican espacios no suaves, donde definir un determinado número de truncación puede significar ignorar parte del polinomio o establecer demasiados subespacios para un estudio. Por lo que es importante elegir un número de truncación adecuado, el cual gracias a la rapidez de la convergencia de la serie de Fourier puede ser mejor determinado.

Finalmente se expresa una aplicación de los conceptos matemáticos anteriormente explicados al Problema Espectral en el Estudio de Estabilidad Lineal de Flujos sobre una Esfera, asumiendo una ecuación de vorticidad en una esfera con valores coordenados conocidos y se establece una solución para resolver el modo normal por medio del operador espectral.

Estos resultados teóricos tienen diversas aplicaciones, especialmente en el uso del método espectral para estudiar la dinámica y estabilidad de flujos sobre una esfera, y en particular flujos atmosféricos.

Summary

In the present work a real grade derivative is introduced and a soft functions family of Hilbert H^r , defined on a unitary sphere S . for this case, Space of Hilbert are chosen for having the necessary characteristics that model a unitary sphere.

The spherical polynomials are functions that define our wave function and, they are solved by harmonics spherical. So that is why the first two chapter explain in detail, the characteristics of each one and this is the reason why they were eligible to work with, in a space of Hilbert which, at a time allows to define the coordinate in a unitary system.

A grade n spherical polynomial represent a lineal combination of homogenous harmonics spherical of grade k $0 \leq k \leq n$. In its place, each homogenous polynomial of grade k is a lineal combination of spherical harmonics $Y_k^m(x)$ of grade n and zonal number m ($-k \leq m \leq k$).

An interior product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, defined in a space of Hilbert generates a norm $\| \cdot \|$.

The parameter r of the family of Hilbert's spaces $H^r(S)$, determines the level of softness in functions. The Hilbert space is associated a spherical harmonic which is associated to a space, therefore exists a direct and lineal relation between each grade of polynomial with a space or sub-space of the same grade. The grade of each harmonic will determine the softness that the function might experience inside our space. thus, exist relation of orthogonality in the Legendre polynomials that allow us to do the relation between the Hilbert space and the spherical harmonic.

The main relation between the refered spaces, are studied, the speed is estimated of the convergence in Fourier's series of the spherical harmonics for one function of $H^r(S)$. In this chapter, the speed of the convergence in the Fourier's series is studied, which will determine how soft our space is and mainly, what number of truncation it is better for a given space, because most of the problems implicate no-soft spaces,

where to define a determined number of truncation may signify to ignore part of the polynomial or to establish too many sub-spaces for one study. For this cause, it is important to choose a proper number of truncation, which thanks to the convergence of the Fourier's series, can be more properly determined.

Finally, an application of the mathematical concepts previously explained to the spectral problem in the stud of Lineal stability of flows on a sphere, it is expressed, assuming that an equation of vorticity in a sphere with coordinates values known and a solution to solve the normal mode by means of the spectral operator is established.

These theoretical results have several application, specially in the use of the spectral method to study the dynamics and stability of flows on a sphere and, in particular, atmospheric flows.

Índice general

1. Introducción	11
2. Polinomios Esféricos	13
2.1. Funciones de Legendre Asociados	13
2.2. Propiedades	14
2.3. Fórmulas de Recurrencia	15
3. Armónicos Esféricos	19
3.1. Propiedades Básicas de los Armónicos Esféricos	19
3.2. Mapas de Coordenadas Geográficas y Separación de la Unidad	22
3.3. Partición de la Unidad	24
4. Espacios de Hilbert $H^r(S)$ sobre una Esfera	29
4.1. Espacios $L_2(S)$ y Proyectores Ortogonales	29
4.2. Derivadas de orden real y espacios $H^r(S)$	32
4.3. Rapidez de Convergencia de las Series de Fourier	42
4.4. Espacio $C(S)$ de funciones continuas sobre una esfera	43
5. Dinámica de Fluidos Ideales sobre una Esfera	49
5.1. Las Leyes de Conservación Principales	50
5.2. Soluciones de Onda Diferenciables Infinitamente de la Ecuación de Vorticidad	53
6. Sobre el Problema Espectral en el Estudio de Estabilidad Lineal de Flujos sobre una Esfera	59
6.1. Estabilidad de modo normal	59
6.2. Operador Espectral para un Fluido Viscoso	63

6.3. Operador Espectral para un Fluido Ideal	67
6.4. Matriz de Estabilidad	71
Apéndice	79

Capítulo 1

Introducción

La base de este trabajo trata principalmente sobre dos familias de espacios de funciones sobre una esfera unitaria bidimensional S : espacios de Hilbert de funciones generalizados $H^r(S)$ ($r \in \mathbb{R}$) y espacios Banach de funciones continuas $\mathcal{E}^r(S)$ ($r \geq 0$). El índice real r indica el grado de suavidad de una función en la esfera y significa que la derivada de grado fraccional r de una función de espacio $H^r(S)$ (de espacio $\mathcal{E}^r(S)$) es representado por su propia serie de Laplace-Fourier, que converge en una norma media cuadrática (converge uniformemente y absolutamente).

Espacios de funciones escalares que tienen derivadas fraccionales en una esfera son definidos principalmente por dos caminos: o a través de los módulos de continuidad de una función [8], [14], [19], [30] o por medio de la concepción del operador multiplicador usando propiedades geométricas de una esfera [16], [26], [59]. Nosotros usamos aquí el segundo método, el cual es una aproximación más simple y constructivo.

El capítulo 1 y 2 estudian brevemente las propiedades principales de armónicos esféricos y funciones de Legendre asociadas. Para más detalles ver [1], [5], [21], [49], [59].

En la sección 2.1 consideramos mapas con coordenadas geográficas para una esfera y el bien conocido teorema sobre la partición de la unidad que es una importante herramienta en teoría de integración de funciones sobre variedades compactas de suavidad [21]. En detalle diferentes mapas sobre la esfera son estudiados para los casos en [21]. Algunas propiedades estructurales de la familia de los espacios de Hilbert H^S son discutidos en el capítulo 3. De acuerdo al bien conocido fenómeno de Gibbs, la convergencia de la serie de Fourier-Laplace es deteriorada en vecindades de fuertes

cambios de una función continua. En el capítulo 5 consideramos algunas características de convergencia uniforme de series de Fourier-Laplace de funciones continuas.

Capítulo 2

Polinomios Esféricos

2.1. Funciones de Legendre Asociados

En esta sección estudiamos las funciones de Legendre asociadas que forman parte importante de los armónicos esféricos, las funciones básicas para presentar una función continua sobre la esfera. Las funciones de Legendre asociadas [1] se definen en el intervalo $[-1, 1]$ como:

$$P_n^m(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}} (\mu^2 - 1)^n \quad (2.1)$$

donde $\mu \in [-1, 1]$.

Por causa de brevedad introducimos el multi-índice $\alpha = (m, n) = (m_\alpha, n_\alpha)$ para el número de onda. Además usamos la siguiente notación:

$$\bar{\alpha} = (-m, n) = (m_\alpha, n_\alpha),$$

Así,

$$Y_\alpha \equiv Y_n^m, \quad \chi_\alpha \equiv \chi_n = n(n+1) \quad (2.2)$$

definen el armónico esférico, las funciones de Legendre asociadas y el eigenvalor correspondiente, respectivamente. También definimos las sumatorias que tienen la notación anteriormente definida;

$$\sum_{\alpha(k)} \equiv \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{m=-n}^n, \quad \sum_{\alpha(k)}^N \equiv \sum_{n=k}^N \sum_{m=-n}^n.$$

2.2. Propiedades

Estudiamos ahora las propiedades básicas de funciones de Legendre asociadas. Sean \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} conjuntos de números naturales, enteros y reales respectivamente;

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\};$$

$$\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\};$$

$$\mathbb{Z}_0 = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}.$$

Sean m y n números enteros. Tenemos [1], [49], [59].

1. $P_n^m(\mu) = 0$ si $m > n$
2. Existen relaciones entre números de onda complejos conjugados α y $\bar{\alpha}$; los polinomios de Legendre son antisimétrico o simétricos, tal que:

$$P_{\bar{\alpha}} = (-1)^{m\alpha} P_{\alpha}, \quad Y_{\bar{\alpha}} = (-1)^{m\alpha} \bar{Y}_{\alpha}. \quad (2.3)$$

3. La función $P_n^m(\mu)$ es igual a cero en puntos del intervalo $(-1, 1)$.
4. Se deduce de

$$P_n^m(-\mu) = (-1)^{n-m} P_n^m(\mu) \quad (2.4)$$

que las funciones P_n^m y Y_n^m son simétricas (antisimétricas) en μ con respecto al ecuador $\mu = 0$, si $(n - m)$ es número par (impar) (ver Figura 3.3). En los polos de una esfera una función P_n^m no es igual a cero sólo si $m = 0$, es decir, sólo para los polinomios de Legendre $P_n(\mu) \equiv P_n^0(\mu) : P_n(1) = 1$.

5. Las siguientes relaciones de ortogonalidad son válidas para P_n^m :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\mu) P_{\ell}^m(\mu) d\mu = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1} \delta_{nl}, \quad (2.5)$$

$$(n, l \geq m \geq 0),$$

además,

$$\int_{-1}^1 \frac{(P_n^m)^2}{1 - \mu^2} d\mu = \frac{(n + m)!}{2m(n - m)!},$$

$$(n \geq 0, 1 \leq m \leq n).$$

6. La desigualdad $|P_n(\mu)| \leq 1$ se mantiene para todo $n \in \mathbb{Z}_0$. Esta estimación sigue de la fórmula

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\mu + i\sqrt{1 - \mu^2} \sin \lambda \right)^n d\lambda \quad (2.6)$$

[59]. La siguiente igualdad es válida para todo $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{R}$ [59]:

$$(-1)^m P_n^m(\mu) = \frac{(-n)_m (n + 1)_m}{m!} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-n)_j (n + 1)_j}{(m + 1)_j j!} \left(\frac{1 - \mu}{2} \right)^j \right] \quad (2.7)$$

donde $(a)_0 = 1$ y

$$(a)_j = a(a + 1) \dots (a + j - 1) \quad (2.8)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

2.3. Fórmulas de Recurrencia

7. Las funciones de Legendre asociadas satisfacen (m, n) a las fórmulas recurrentes siguientes [59]:

$$P_n^{m+1} = \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} [(n+m)P_{n-1}^m - (n-m)\mu P_n^m] \quad (2.9)$$

$$(n-m+1)P_{n+1}^m = (2n+1)\mu P_n^m - (n+m)P_{n-1}^m \quad (2.10)$$

$$P_{n+1}^m = P_{n-1}^m + (2n+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m-1} \quad (2.11)$$

$$\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m+1} = 2m\mu P_n^m - (n+m)(n-m+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m-1} \quad (2.12)$$

$$(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n^m = -n\mu P_n^m + (n+m)P_{n-1}^m \quad (2.13)$$

$$(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n^m = m\mu P_n^m - (n+m)(n-m+1)\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m-1} \quad (2.14)$$

$$\sqrt{1-\mu^2}P_n^{m+1} = m\mu P_n^m + (1+\mu^2)\frac{d}{d\mu}P_n^m \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{d\mu}(P_{n+1} - P_{n-1}) = (2n+1)P_n \quad (2.16)$$

donde $P_n(\mu)$ son polinomios de Legendre. Se muestra fácilmente que la (2.15) sigue de (2.9) y (2.13), pero las igualdades (2.12) y (2.16) son validas debido a (2.14), (2.15) y (2.11), (2.15) respectivamente. En particular, para calcular funciones P_n^m para enteros m, n ($0 \leq m \leq n$) podemos usar igualdades

$$P_m^m(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^m m!} (2m)!; \quad P_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1)P_m^m(\mu)$$

Y la fórmula de recurrencia (2.10). Si $m < 0$ entonces es necesario aplicar las igualdades (2.3).

8. Nosotros usamos a menudo funciones de Legendre normalizadas.

$$Q_n^m(\mu) = \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\mu) \quad (2.17)$$

que satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia para todo entero m, n [59]

$$Q_n^m = \frac{\mu}{D_{mn}} Q_{n-1}^m - \frac{D_{m,n-1}}{D_{mn}} Q_{n-2}^m \quad (2.18)$$

$$(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}Q_n^m = (2n+1)D_{mn}Q_{n-1}^m - n\mu Q_n^m \quad (2.19)$$

donde los coeficientes D_{mn} son definidos como

$$D_{mn} = \left(\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right) \quad (2.20)$$

Capítulo 3

Armónicos Esféricos

3.1. Propiedades Básicas de los Armónicos Esféricos

Los armónicos esféricos forman una base natural ortogonal para funciones reales definidas sobre una esfera. Por eso, es muy importante conocer sus propiedades.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ la esfera unitaria en un espacio Euclidiano de tres dimensiones. Denotamos por $C^\infty(S)$ el conjunto de funciones diferenciables infinitamente en S y tomamos como producto escalar y norma en $C^\infty(S)$ las expresiones

$$\langle f, g \rangle = \int_S f \bar{g} dS \quad (3.1)$$

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \quad (3.2)$$

Aquí $dS = d\lambda d\mu$ es un elemento cuadrado de una superficie esférica, $\mu = \sin \varphi$; $\mu \in [-1, 1]$, es una latitud, $\lambda \in [0, 2\pi]$ es una longitud y \bar{g} es una función conjugada compleja para g .

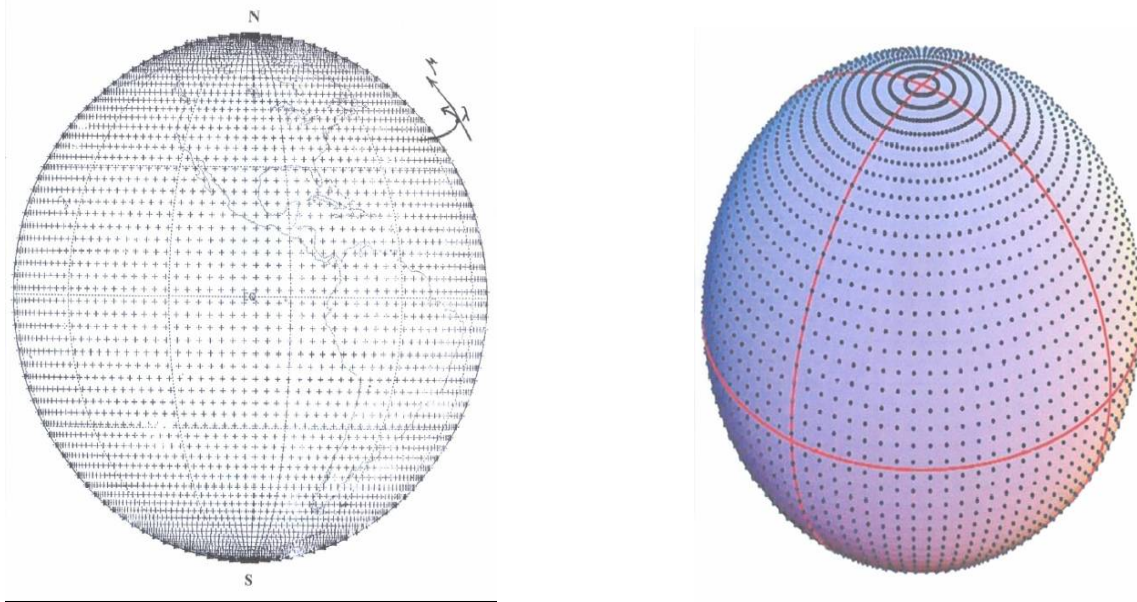


Figura 3.1: Ejemplos de coordenadas geográficas para λ y μ

Es conocido [49], que los armónicos esféricos

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (3.3)$$

(m, n son números enteros,) son eigenfunciones del operador de Laplace simétrico en S :

$$-\Delta Y_n^m = -\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} Y_n^m \right] - \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} Y_n^m = \chi_n Y_n^m \quad (3.4)$$

donde

$$\chi_n = n(n+1) \quad (3.5)$$

es el eigenvalor correspondiente para Y_n^m si $|m| \leq n$.

Los armónicos esféricos forman una base ortonormal en el espacio C^∞ [49]:

$$\langle Y_n^m, Y_l^k \rangle = \delta_{mk} \delta_{nl} \quad (3.6)$$

donde

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{si } m = k; \\ 0, & \text{si } m \neq k. \end{cases} \quad (3.7)$$

Es la delta de Kronecker. Para cada número entero $n \geq 0$ el eigenvalor tiene multiplicidad $2n + 1$, y los armónicos esféricos $Y_n^m(\lambda, \mu)$, donde $-n \leq m \leq n$, forman un eigensubespacio \mathcal{H}_n $(2n + 1)$ -dimensional correspondiente al eigenvalor χ_n de la Fig. 3.3.

Los números de onda de armónicos esféricos que representan una base de subespacios $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ y \mathcal{H}_3 son denotados por símbolos $\bigcirc, \triangle, \diamond$ y \square respectivamente. Los símbolos negros corresponden a los armónicos esféricos antisimétricos (con respecto al ecuador).

COMENTARIO 3.1 El subespacio \mathcal{H}_n en conjunto invariante con respecto no solo al operador de Laplace pero también muchas transformaciones del grupo de rotación de una esfera alrededor de éste eje arbitrario [21], [49]. La última declaración significa que un armónico esférico Y_n^m de \mathcal{H}_n puede ser representado en un nuevo sistema de coordenadas (λ', μ') por

$$Y_n^m(\lambda', \mu') = \sum_{k=-n}^n \alpha_k(m, n, N') Y_n^k(\lambda, \mu) \quad (3.8)$$

donde los números complejos $\alpha_k(m, n, N')$ dependen de los números de onda m, n y el polo N' del nuevo sistema de coordenadas.

En el Comentario 3.1 conclusión presentamos el teorema de adición para armónicos esféricos que es realmente usado con frecuencia.

TEOREMA 3.1 ([21]) Sea ω un ángulo entre dos radio vectores unitarios \vec{x}_1, \vec{x}_2 correspondientes a los puntos $x_1, x_2 \in S$.

Entonces

$$P_n(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^m(x_1) \overline{Y_n^m}(x_2) \quad (3.9)$$

Donde $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = \cos \omega$ es el producto escalar de vectores \vec{x}_1 y \vec{x}_2 .

En particular, si $x_1 = x_2$ entonces $P_n(1) = 1$ y de (3.9) se deduce una relación importante

$$\sum_{m=-n}^n |Y_n^m(x)|^2 = \sum_{m=-n}^n [Q_n^m(\mu)]^2 = \frac{2n+1}{4\pi} \quad (3.10)$$

De la igualdad (3.10) tenemos

$$|Y_n^m(x)| = |Q_n^m| \leq C\sqrt{n} \quad (3.11)$$

3.2. Mapas de Coordenadas Geográficas y Separación de la Unidad

Introducimos una métrica interna en una esfera unitaria S . Podemos convertir la esfera S en un espacio métrico si definimos la distancia entre dos puntos arbitrarios $x, y \in S$ por

$$\rho(x, y) = \arccos(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \omega. \quad (3.12)$$

Aquí usamos la misma notación que en el Teorema 3.1. La esfera S es un conjunto convexo en la métrica (3.12). Notemos que en la esfera existe el único camino más corto entre dos puntos $x, y \in S$ si $y \neq -x$. Si $y = -x$ entonces un semi círculo arbitrario conectando los puntos x y $-x$ es el camino más corto entre estos puntos. Por ejemplo hay numero infinito de meridianos, que conectan el polo Norte con el polo Sur, además todos tienen la misma longitud de onda.

Denotado por un conjunto abierto en métrica (3.12) en la esfera S . Con un sistema de coordenadas local denotamos un dominio coordenado $\Omega \subset S$.

DEFINICIÓN 3.1 ([21]) Una pareja (Ω, f) consistiendo en un dominio Ω y una inyección $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1, x_2)$, es llamado un mapa en la esfera S . Además

mapeando $f : x \mapsto f(x)$ casi siempre es un homomorfismo. Denotaremos el mapeado inverso f^{-1} por

$$\tau : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \in S \subset \mathbb{R}^3$$

El mapa de coordenadas geográficas es a menudo usado como mapa sobre una esfera. Sea N y P polos norte y sur de la esfera S en el sistema coordenado (λ, μ) . Las coordenadas geográficas son validas sólo fuera del conjunto cerrado $\Gamma = \{x \in S : |\lambda(x)| = \pi, \mu(x) \in [-1, 1]\}$ llamado dato lineal. Los mapeos en f no son únicamente valuados en Γ . De hecho, la longitud λ puede tener dos valores $+\pi$ y $-\pi$ en Γ si $|\mu| < 1$. Además para los polos N y P e imposible tener algún cierto valor de λ de intervalo $[-\pi, \pi]$.

DEFINICIÓN 3.2 *Dejamos que Ω sea un conjunto abierto S/Γ . decimos que una pareja (Ω, f) es un mapa de coordenadas geográficas, si $f : x \mapsto (\lambda(x), \mu(x))$ es un isomorfismo entre un elemento x de \mathbb{R}^3 , perteneciendo a Ω , y un punto $(\lambda(x), \mu(x))$ de \mathbb{R}^2 . Como imagen $f(\Omega)$ tenemos el conjunto abierto (rectangular) $\Pi = (-\pi, \pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$. El mapeo inverso está definido por*

$$x = \tau(\lambda, \mu) = \left(\sqrt{1 - \mu^2} \cos \lambda, \sqrt{1 - \mu^2} \sin \lambda, \mu \right) \in \mathbb{R}^3$$

Figura (3.4). El elemento plano $d\lambda d\mu$ en \mathbb{R}^2 corresponde al elemento de superficie dS en \mathbb{R}^3 . El Jacobiano de transformación τ es igual a la unidad (ver por ejemplo, [?], Secciones 18.3.5 y 18.3.7). Las coordenadas geográficas son definidas casi en todos lugares en S . Por consiguiente

$$\int_S \psi(x) dS(x) = \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\tau(\lambda, \mu)) d\lambda d\mu \quad (3.13)$$

Consideremos dos mapas de coordenadas geográficas (Ω_1, f_1) y (Ω_2, f_2) correspondientes a los polos N_1 y N_2 de la esfera S respectivamente. Si tomamos el polo N_2 para que tuviera coordenadas $(\pi/2, 0)$ en sistema coordenado (λ_1, μ_1) entonces el Datos líneal Γ_2 es una parte del ecuador del sistema coordenado (λ_1, μ_1) (Figura 3.5). En este caso la intersección $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ en un conjunto vacío y la unión $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de conjuntos abiertos Ω_1 y Ω_2 es una cubierta abierta de la esfera S

La esfera S es un ejemplo de variedad compacta diferenciable. Por tanto el teorema sobre partición de unidad es valido para S .

3.3. Partición de la Unidad

TEOREMA 3.2 ([21]) Sea $\{\Omega_i\}$ será una cobertura finita abierta de la esfera S por dominios coordinados Ω_i . Existe una partición de unidad $\{\varphi_i(x)\}$ subordinado a la cobertura $\{\Omega_i\}$, es decir una colección finita de funciones diferenciables infinitamente $\varphi_i(x) \in C^\infty(S)$ con las siguientes propiedades:

1. $\text{supp } \varphi_i(x) \subset \Omega_i$ para todo i ,
2. $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ para todo i y para cada $x \in S$,
3. $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ para cada $x \in S$.

Aquí $\text{supp } f(x)$ es el soporte de f , i.e. la cerradura del conjunto de todos los puntos $x \in S$ con $f(x) \neq 0$.

Debido al Teorema 3.3 cualquier función continua $f(x)$ puede ser representada en S por

$$f(x) = \sum_i f_i(x) \quad (3.14)$$

donde $f_i(x) = f(x) \cdot Y_i(x)$ y $Y_i(x)$ es una partición de unidad. Note que un valor de integral

$$\int_S f(x) dS(x) = \sum_i \int_{\Omega_i} f_i(x) dS(x) \quad (3.15)$$

no depende de la elección de una cobertura $\{\Omega_i\}$ de S [21].

Podemos obtener la relación entre las coordenadas (λ, μ) y (λ_1, μ_1) de cualquier punto en la esfera:

$$\mu_1 = \mu\mu_0 + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \mu_0^2} \cos(\lambda - \lambda_0), \quad (3.16)$$

$$\mu = \mu_1\mu_0 - \sqrt{1 - \mu_1^2}\sqrt{1 - \mu_0^2} \cos \lambda_1, \quad (3.17)$$

$$\sqrt{1 - \mu_1^2} \sin \lambda_1 = \sqrt{1 - \mu^2} \sin(\lambda - \lambda_0). \quad (3.18)$$

Aquí (λ_0, μ_0) son coordenadas del polo N_1 del segundo sistema en un sistema coordinado (λ, μ) . La ecuación (3.16) da el valor de μ_1 en terminos de λ, μ, λ_0 y μ_0 . La ecuación (3.17) es la fórmula correspondiente para la transformación inversa. Una vez

μ_1 es calculado de λ , μ , λ_0 y μ_0 por medio de (3.16), λ_1 puede ser obtenido de (3.17) y (3.18). Estas ecuaciones dan $\cos \lambda_1$ y $\sin \lambda_1$ respectivamente, que juntos determinan λ_1 . Recíprocamente, una vez que μ es calculado de λ_1 , μ_1 y μ_0 por medio de (3.17), $\lambda - \lambda_0$ puede ser obtenido de (3.16) y (3.18).

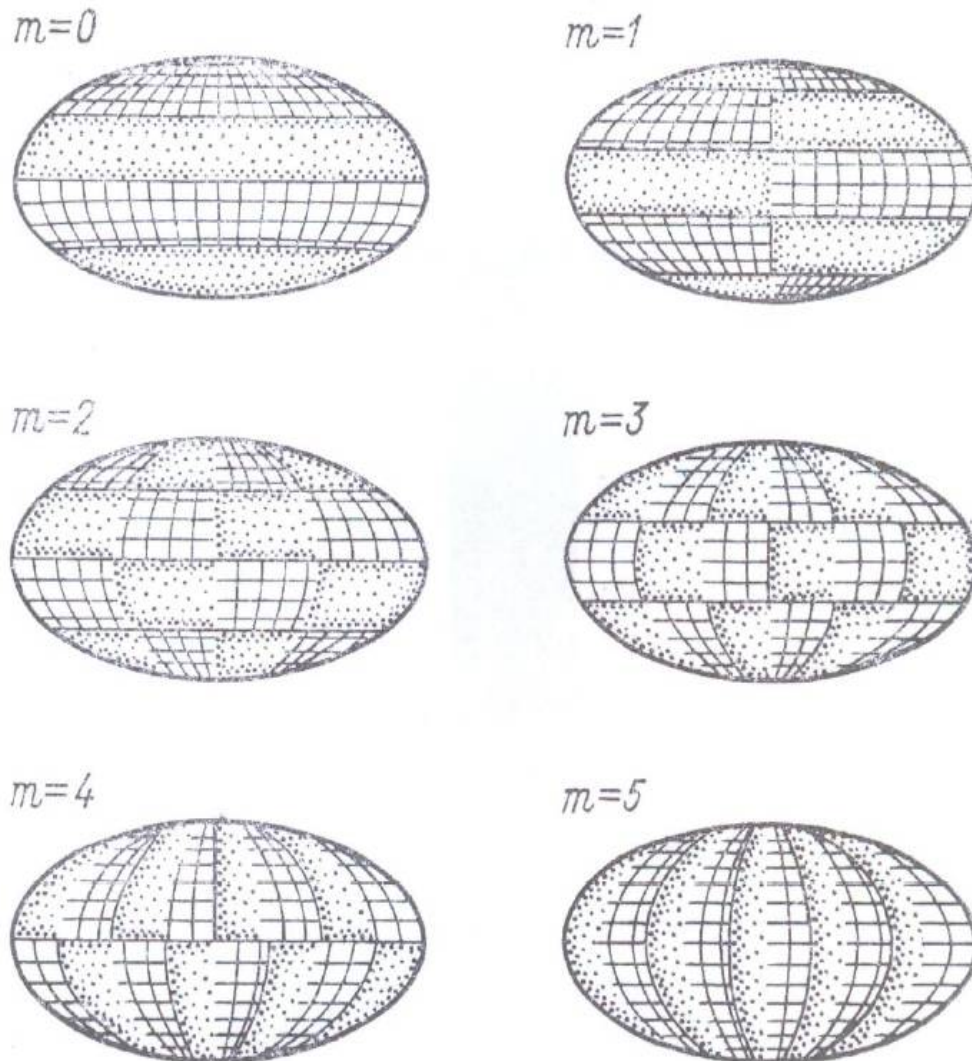


Figura 3.2: Ejemplos de armónicos esféricos de grado m distinto que indican el grado de complejidad del armónico esférico utilizado, aplicado al modelo de una esfera

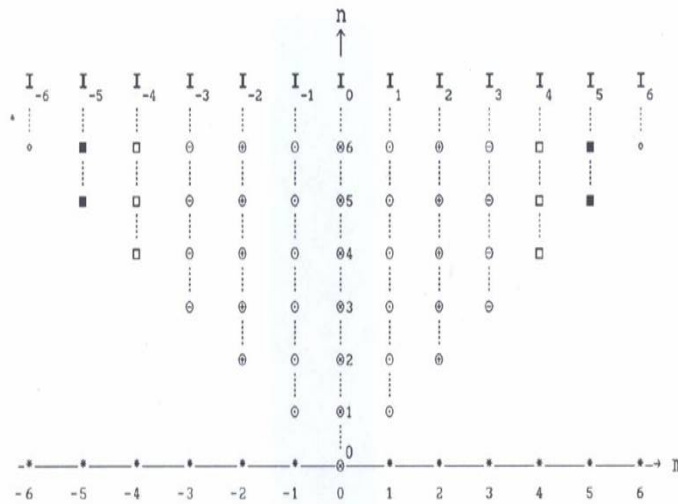


Figura 3.3: Plano de los números de onda de armónicos $Y_n^m(\lambda, \mu)$ con numero zonal m y grado n . I_m es el span de $Y_n^m(\lambda, \mu)$ con $n \geq |m|$.

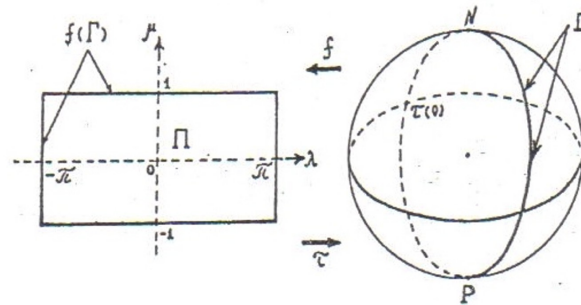


Figura 3.4: Mapa de Coordenadas Geográficas

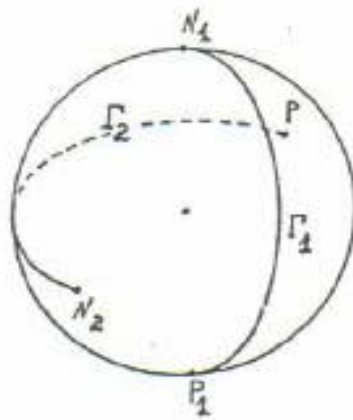


Figura 3.5: Cobertura abierta de una esfera por dominios coordenados

Capítulo 4

Espacios de Hilbert $H^r(s)$ sobre una Esfera

4.1. Espacios $L_2(S)$ y Proyectores Ortogonales

En esta sección introducimos los espacios de Hilbert H^s de funciones generalizadas (distribuciones) en una esfera cuyas derivadas fraccionales de grado s pertenecen al espacio $L^2(S)$ [16], [26], [54], [59].

DEFINICIÓN 4.1 Denotamos por Φ el espacio de sucesión $\hat{\Psi} = \{\Psi_n^m\} = \{\Psi_\alpha\}$ de coeficientes de Fourier

$$\Psi_n^m = \langle \Psi, Y_n^m \rangle \quad (4.1)$$

todas las funciones $\Psi \in C^\infty(S)$.

Debido a la identidad de Parseval [49], el mapeo $C^\infty(S) \mapsto \phi$ es un isomorfismo isométrico y de transformación unitaria del espacio $L^2(S)$, conservando norma y producto escalar de elementos. Identificaremos $C^\infty(S)$ y Φ . Subsecuentemente $(-\Delta)^k \Psi \in C^\infty(S)$ y cada $k \in \mathbb{N}$, entonces debido a la fórmula

$$(-\Delta)^k \Psi = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [n(n+1)]^k \Psi_n^m Y_n^m \quad (4.2)$$

cuando $n \rightarrow \infty$ los coeficientes de Fourier Ψ_n^m para cada secuencia $\hat{\Psi} \in \Phi$ tienden a cero más rápido que la sucesión $1/n^k$.

DEFINICIÓN 4.2 Definimos Φ^* como dual al espacio Φ de series de Fourier formales $h \sim \sum_{\alpha} h_{\alpha} \cdot Y_{\alpha}$ tal que la la secuencia \hat{h} de coeficientes de Fourier h_{α} satisfaga la condición

$$\sum_{\alpha(0)} \Psi_{\alpha} \bar{h}_{\alpha} < \infty \quad (4.3)$$

para todo $\hat{\Psi} \in \Phi$. Aquí el signo \sim no afirma nada sobre la convergencia de las series.

Así el espacio Φ^* de funcionales lineales continuas

$$h(\Psi) \equiv (\hat{\Psi}, \hat{h}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha} \bar{h}_{\alpha} \quad (4.4)$$

sobre Φ puede ser identificado (debido al isomorfismo) con el espacio de tales secuencias $\hat{h} = h_n^m$, que sus elementos h_n^m incrementan no más rápido que de algunos de grado n .

DEFINICIÓN 4.3 Denotamos la cerradura de $C^{\infty}(S)$ en la norma (3.2) como el espacio de Hilbert $L^2(S)$ de funciones generalizadas en la esfera S :

$$L^2(S) = \{\Psi \in \Phi^* : \|\Psi\| < \infty\}.$$

El espacio $L^2(S)$ es una suma ortogonal directa de subespacios \mathcal{H}_n [49]:

$$L^2(S) = \oplus_{n=0}^{\infty} H_n \quad (4.5)$$

DEFINICIÓN 4.4 Para funciones arbitrarias $\Psi \in L^2(S)$ y cualquier función zonal $Z(\vec{x} \cdot \vec{y})$ que depende sólo de la distancia $\rho(x, y)$ entre dos puntos $x, y \in S$ (ver (3.12) y [49]) definimos la convolución de Ψ y z por

$$(\Psi * Z)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \Psi(y) Z(\vec{x} \cdot \vec{y}) dS(y) \quad (4.6)$$

DEFINICIÓN 4.5 Sea $n \in \mathbb{Z}_0$. Introducimos el proyector ortogonal $y_n : L^2(S) \mapsto \mathcal{H}_n$ por

$$Y_n(\Psi; x) = (2n + 1) (\Psi * P_n)(x) \quad (4.7)$$

(por causas de brevedad algunas veces escribiremos $Y_n(\Psi)$ en lugar de $Y_n(\Psi; x)$). De hecho,

$$(2n + 1) (Y_n(\Psi) * P_n)(x) = Y_n(\Psi; x) \quad (4.8)$$

esto es, $Y_n(Y_n(\Psi)) = Y_n(\Psi)$ para toda función $\Psi \in L^2(S)$. Es fácil mostrar que

$$Y_n(\Psi; x) = \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(x) \quad (4.9)$$

De hecho, debido a la definición 4.1 y el Teorema 3.1 tenemos

$$Y_n(\Psi; x) = \sum_{m=-n}^n Y_n^m(x) \langle \Psi(y), Y_n^m(y) \rangle = \sum_{m=-n}^n \Psi_n^m Y_n^m(x)$$

En particular,

DEFINICIÓN 4.6 *Introducimos subespacios de dimensión finita \mathcal{P}^N y \mathcal{P}_0^N de polinomios esféricos de grado $n \leq N (N \in \mathbb{Z}_0)$ por*

$$\mathcal{P}^N = \bigoplus_{n=0}^N \mathcal{H}_n, \quad \mathcal{P}_0^N = \{ \Psi \in \mathcal{P}^N : Y_0(\Psi) = 0 \}$$

Así, $Y_0(\Psi) = 0$ para todo $\Psi \in \mathcal{P}_0^N$.

DEFINICIÓN 4.7 *El proyector ortogonal $T_N : L^2(S) \mapsto \mathcal{P}^N$ es definido por*

$$T_N \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\Psi; x) = (\Psi * S_N)(x) \quad (4.10)$$

donde la convolución kernel es [74]

$$S_N(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \sum_{n=0}^N (2n + 1) P_n(\vec{x}, \vec{y}) \quad (4.11)$$

Así, para cada función $\Psi(x) \in L^2(S)$ el elemento $T_N \Psi$ es la truncación triangular de las series de Fourier-Laplace de Ψ .

Note que hay la existencia de las identidades Parseval-Steklov's

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{\alpha(0)} |\Psi_\alpha|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|Y_n(\Psi)\|^2$$

$$\langle \Psi, h \rangle = \sum_{\alpha(0)} \Psi_\alpha \bar{h}_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y_n(\Psi), Y_n(h) \rangle \quad (4.12)$$

para todos los elementos $\Psi, h \in L^2(S)$ [49]. Debido a (4.12) cada función $\Psi \in L^2(S)$ puede ser representada por su propia serie de Fourier-Laplace

$$\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\Psi; x) \quad (4.13)$$

esto es

4.2. Derivadas de orden real y espacios $H^r(S)$

DEFINICIÓN 4.8 ([16], [59]) Sea una función $\Psi(x) \in C^\infty(S)$ y $S \in \mathbb{R}$. Introducimos un operador multiplicador $\Lambda^S = (-\Delta)^{S/2}$ por

$$Y_n(\Lambda^S \Psi) = \chi_n^{s/2} Y_n(\Psi)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_0$. El operador Λ^S es completamente definido por el multiplicador $\{\chi_n^{s/2}\}_{n=0}^{\infty}$ (ver (3.5) y [59]). Consideraremos Λ^S como un operador de diferenciación fraccional de Ψ .

En particular, si $s = 1$ entonces el operador Λ puede ser interpretado como una raíz cuadrada del operador de Laplace no negativo (3.4). Así,

$$\Lambda^s \Psi(x) = \sum_{n=1}^N \chi_n^{s/2} Y_n(\Psi; x) \equiv \sum_{\alpha(1)} \chi_\alpha^{s/2} \Psi_\alpha Y_\alpha(x) \quad (4.14)$$

DEFINICIÓN 4.9 Sea $r \in \mathbb{R}$ y $\Psi \in C^\infty(S)$. Definimos el operador multiplicador $D^r \equiv (E - \Delta)^{r/2}$ [59], por

$$Y_n(D^r \Psi) = d_n^{r/2} Y_n(\Psi) \quad (4.15)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_0$.

En otras palabras,

$$D^r \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{r/2} Y_n(\Psi; x) \equiv \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^{r/2} \Psi_\alpha Y_\alpha(x) \quad (4.16)$$

para todo $\Psi(x) \in C^\infty(S)$. Usamos aquí

$$d_\alpha \equiv d_n = 1 + \chi_n = 1 + n(n+1) \quad (4.17)$$

Los operadores Λ^S y D^Γ (así como proyectores Y_n y T_N) son invariantes con respecto a cada operador del grupo $SO(3)$ de rotaciones de una esfera [34]. Podemos considerar los operadores Λ^S y D^Γ como una generalización de los operadores $(-\Delta)^n$ y $(E - \Delta)^n$ en el caso cuando n no es sólo natural pero tampoco cualquier número real. La aplicación de operadores Λ^S y D^Γ nos permite definir el grado de suavidad de una función sobre una esfera. Actualmente, el grado de suavidad de una función es completamente determinado por la proporción de descenso de los coeficientes de Fourier (4.1) en (4.13) (ver [59]).

DEFINICIÓN 4.10 *Introducimos el subespacio $C_0^\infty(S)$ por*

$$C_0^\infty(S) = \{\Psi \in C_0^\infty(S) : Y_0(\Psi) = 0\}$$

COMENTARIO 4.1 Ya que cada función de $C_0^\infty(S)$ es ortogonal a constante, el operador Λ^s puede ser definido por la igualdad (4.14) para todo $s \in \mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 4.11 *Introducimos en $C_0^\infty(S)$ en producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ y norma $\|\cdot\|_s$ por*

$$\begin{aligned} \langle \Psi, h \rangle_s &= \langle D^s \Psi, D^s h \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n^s \langle Y_n(\Psi), Y_n(h) \rangle \equiv \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^s \Psi_\alpha \bar{h}_\alpha, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\|\Psi\|_s = \|D^s \Psi\| = \langle \Psi, \Psi \rangle_s^{1/2} =$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} d_n^s \|Y_n(\Psi)\|^2 \right\} \equiv \left\{ \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^s |\Psi_\alpha|^2 \right\}^{1/2}$$

Es evidentemente que

$$\langle \Psi, h \rangle_s = \sum_{\alpha(1)} d_\alpha^s \Psi_\alpha \bar{h}_\alpha, \|\Psi\|_s = \left\{ \sum_{\alpha(1)} d_\alpha^s |\Psi_\alpha|^2 \right\}^{1/2} \quad (4.19)$$

se sostiene para todo $\Psi, h \in C_0^\infty(S)$.

DEFINICIÓN 4.12 *Los espacios de Hilbert obtenidos por medio de cerraduras de $C(S)$ y $C_0^\infty(S)$ en norma (4.18) los denotaremos como H^s y H_0^s respectivamente.*

Así, $H^0 = L^2(S)$. Por causa de brevedad guardaremos los símbolos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|\cdot\|$ para producto escalar y norma en espacio H^0 respectivamente (ver (3.1), (3.2)). Identificaremos los espacios de Hilbert $H^s(H_0^s)$ con el espacio, obtenido por realización del espacio $\Phi(\Phi_0)$ en norma (4.18). Aquí Φ es el espacio introducido en la definición 4.1 y Φ_0 es el espacio de secuencias de coeficientes de Fourier de funciones de $C_0^\infty(S)$. Se mostrará en el Lema 4.2 que las inclusiones

$$\Phi = C^\infty(S) \subset H^r \subset H^s \subset H^0 \subset H^{-s} \subset H^{-r} \subset \Phi^* \quad (4.20)$$

son continuas si $0 < s < r$ [54], [59].

Además, probaremos que el espacio dual $(H^s)^* = H^{-s}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ (ver Lema 4.2).

Sea $s, r \in \mathbb{R}$. El operador $D^r : C^\infty(S) \mapsto C^\infty(S)$ es simétrico:

$$\langle D^r \Psi, h \rangle_s = \langle \Psi, D^r h \rangle_s$$

y por tanto permite una extensión para elementos de H^s .

DEFINICIÓN 4.13 *La distribución $z \in H^s$ es llamada por derivadas r -ésima $D^r \Psi$ del elemento $\Psi \in H^s$, si*

$$\langle z, h \rangle_s = \langle z, D^r h \rangle_s \quad (4.21)$$

sostenido para todo $h \in C^\infty(S)$.

Note que la definición 4.2 idénticamente coincide con la definición (4.16) para todo $h \in C^\infty(S)$.

COMENTARIO 4.2 La extensión del operador $D^r : H^s \mapsto H^s$ es cerrado. En efecto, si existe $\{\Psi_n\} \subset C^\infty(S)$ tal que $\|\Psi_n - \Psi\|_s$ y $\|D^r \Psi_n - z\|_s$, entonces

$$\langle z, h \rangle_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle D^r \Psi_n, h \rangle_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Psi_n, D^r h \rangle_s = \langle \Psi, D^r h \rangle_s$$

Por la definición 4.2 $\Psi \in \mathfrak{D}(D^r)$ y $z = D^r \Psi$. Aquí $\mathfrak{D}(D^r)$ es un dominio del operador $D^r : H^S \mapsto H^S$.

Similarmente los operadores simétricos cerrados $\Lambda^r : H^S \mapsto H^S$ y $\Lambda^{-r} : H_0^s \mapsto H_0^s$ son introducidos para $r \in \mathbb{R}_+$ y $s \in \mathbb{R}$.

Las siguientes afirmaciones establecen la estimación de operadores intercalados por familias de espacios H^s y H_0^s (ver (4.20)).

LEMA 4.1 ([59]) Sea $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces

1. $\Psi \in H^s$ para todo $\Psi \in H^{s+r}$ y

$$\|\Psi\|_s \leq \|\Psi\|_{s+r}, \quad (4.22)$$

$$\|\Psi\|_{s+r} = \|D^r \Psi\|_s; \quad (4.23)$$

2. para todo $z \in H_0^{s+r}$

$$\|z\|_s \leq 3^{-r/2} \|z\|_{s+r} \quad (4.24)$$

DEMOSTRACIÓN 4.1 Primero sea $\Psi \in C^\infty(S)$ y $h = D^S \Psi$. Es obvio que (4.23) es válido. Para (4.18) tenemos

$$\begin{aligned} \|Y\|_{s+r}^2 &= \|D^{s+r} \Psi\|^2 = \|D^r h\|^2 = \sum_{\alpha(k)} d_\alpha^r |h_\alpha|^2 \\ &\geq \min_\alpha \{d_\alpha^r\} \|h\|^2 = \min_{n \geq k} \{(1 + \chi_n)^r\} \|\Psi\|_s^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, obtenemos (4.22) ya que $k = 0$. Si $\Psi = z \in C_0^\infty(S)$, entonces $k = 1$ y la desigualdad (4.24) sostenida. Ahora consideramos el caso común cuando $\Psi \in H^{s+r}$. Existe la secuencia Cauchy $\{\Psi_n\}$ de funciones $\Psi_n \in C^\infty(S)$ tales que

$\|\Psi_n - \Psi\|_{s+r} \rightarrow 0$. De $\{\Psi_n\}$ y $\{D^r\Psi_n\}$ son sucesiones Cauchy en H^s y (4.22), (4.23) son válidas para estas, tenemos

$$\|\Psi\|_{s+r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Psi_n\|_{s+r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r\Psi_n\|_s = \|D^r\Psi\|_s$$

Usamos aquí que $D^r : H^s \mapsto H^s$ es un operador cerrado. Las desigualdades (4.22), (4.24) son probadas similarmente.

COMENTARIO 4.3 La igualdad (4.23) es válida para todo $r \in \mathbb{R}$.

COROLARIO 4.1 Sea $r \in \mathbb{R}_+$ y $s \in \mathbb{R}$. El operador $D^{-r} : H^s \mapsto H^s$ es limitado por $\|D^{-r}\Psi\|_s \leq \|\Psi\|_s$. La igualdad es realizada a $\Psi = \text{const}$, esto es, la norma espectral del operador D^{-r} igual a la unidad y no depende de s y r . La restricción del operador $D^{-r} : H^s \mapsto H^s$ tiene una norma espectral que es igual a $3^{-r/2}$, y es independiente de s .

Debido a (4.23) y el Comentario 4.2 tenemos

COROLARIO 4.2 Permitimos $s, r \in \mathbb{R}$. El mapeo $D^{-r} : H^s \mapsto H^s$ es isométrico e isomorfo. En particular, a $r = -2s$, el operador $D^{-2s} : H^{s+r} \mapsto H^s$ es un isomorfismo isométrico.

LEMA 4.2 (Desigualdad de Poincare [59]) Para todo $\Psi \in H_0^1$

$$\|\Psi\| \leq \alpha_0 \|\nabla\Psi\| \tag{4.25}$$

donde $\alpha_0 = 1/\sqrt{2}$.

DEMOSTRACIÓN 4.2 Sea $\Psi \in C_0^\infty(S)$ y dejamos $\Omega_1 \cup \Omega_2$ es un cubrimiento de la esfera S por dominios coordenados $\Omega_i = S/\Gamma$ (ver Definición 3.2). Debido al Teorema 3.3 ahí existe una partición de la unidad $\{\varphi_i\}$ subordinada a la cobertura $\{\Omega_i\}$ ($i = 1, 2$). Usando mapas de coordenadas geográficas y Teorema 3.3, obtenemos

$$\|\nabla\Psi\|^2 = \int_S \nabla\Psi \cdot \nabla\bar{\Psi} dS = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla\Psi(x) \cdot \nabla(Y_i(x)\bar{\Psi}(x)) dS(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^2 \int_S \nabla \Psi(\tau(\lambda_i, \mu_i)) \cdot \nabla [Y_i(\tau(\lambda_i, \mu_i)) \bar{\Psi}(\tau(\lambda_i, \mu_i))] d\lambda_i d\mu_i = \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Pi_1} [-\Delta \Psi(\tau(\lambda_i, \mu_i))] Y_i(\tau(\lambda_i, \mu_i)) \bar{\Psi}(\tau(\lambda_i, \mu_i)) d\lambda_i d\mu_i = \\
&= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} [-\Delta \Psi(x)] Y_i(x) \bar{\Psi}(x) dS(x) = \int_S \left(\sum_{i=1}^2 Y_i \right) [-\Delta \Psi] \bar{\Psi} dS = \\
&= \langle -\Delta \Psi, \Psi \rangle = \langle \Lambda^2 \Psi, \Psi \rangle = \|\Lambda \Psi\|^2 \equiv \sum_{\alpha(1)} X_\alpha |\Psi_\alpha|^2 \geq 2 \|\Psi\|^2.
\end{aligned}$$

La inferencia de densidad común concluye la prueba.

Así, también probamos que para todo $\Psi \in H_0^1$

$$\|\nabla \Psi\| = \left\| (-\Delta)^{1/2} \Psi \right\| = \|\Lambda \Psi\| \quad (4.26)$$

Note que el lema 4.2 dado en esta sección generaliza las desigualdad de Poincare para espacios $L^p(S)$ ($1 < p < \infty$). La desigualdad de Poincare para difeomorficos manifolds compactos a la esfera es probado en [1].

De hecho la afirmación más común que el Lema 4.2 es válido:

LEMA 4.3 [59] Sean $r, s, t, \in \mathbb{R}_+$, $r < t$, $a = \sqrt{2}$.

Entonces para todo $\Psi \in H_0^{s+t}$

$$\|\Lambda^r \Psi\|_s \leq a^{r-t} \|\Lambda^t \Psi\|_s. \quad (4.27)$$

La prueba del Lema a $s = 0$ es similar a (4.22) y (4.24). Ya que Λ^r y D^s son operadores conmutativos, el Lemma 4.2 se sostiene para números reales arbitrarios s .

El siguiente Lema afirma la equivalencia de algunas normas inducidas por medio de los operadores Λ^r y D^s .

LEMA 4.4 [59] Sean $s \in \mathbb{R}_+$ y $b = \sqrt{3/2}$. Tenemos las siguientes afirmaciones:

a) para todo $\Psi \in H^s$

$$\frac{1}{2} (\|\Psi\| + \|\Lambda^s \Psi\|) \leq \|\Psi\|_s \leq b^s (\|\Psi\| + \|\Lambda^s \Psi\|); \quad (4.28)$$

b) para todo $\Psi \in H_0^s$

$$\|\Lambda^s \Psi\| \leq \|\Psi\|_s \leq b^s \|\Lambda^s \Psi\|; \quad (4.29)$$

c) para todo $\Psi \in H_0^{-s}$

$$b^s \|\Lambda^{-s} \Psi\| \leq \|\Psi\|_{-s} \leq \|\Lambda^{-s} \Psi\|. \quad (4.30)$$

DEMOSTRACIÓN 4.3 Probamos el caso a). Los otros casos se prueban similarmente. Si $\Psi \in H^s$. Entonces la parte derecha de la desigualdad (4.28) sigue de las estimaciones

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_s^2 &= \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^s |\Psi_\alpha|^2 = |\Psi_0|^2 + \sum_{\alpha(1)} \chi_\alpha^s (1 + \chi_\alpha^{-s})^s |\Psi_\alpha|^2 \leq \\ &\|\Psi\|^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^s \|\Lambda^s \Psi\|^2 \leq b^{2s} (\|\Psi\| + \|\Lambda^s \Psi\|)^2 \end{aligned}$$

Ahora mostramos la validez de la parte izquierda de (4.28):

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_s^2 &= |\Psi_0|^2 + \sum_{\alpha(1)} (1 + \chi_\alpha)^s |\Psi_\alpha|^2 \geq \\ &\frac{1}{2} \left(|\Psi_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha(1)} |\Psi_\alpha|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha(1)} \chi_\alpha^s |\Psi_\alpha|^2 \right) \geq \\ &\frac{1}{2} (\|\Psi\|^2 + \|\Lambda^s \Psi\|^2) \geq \frac{1}{4} (\|\Psi\| + \|\Lambda^s \Psi\|)^2. \end{aligned}$$

El lema es probado.

Es fácil probar algunas desigualdades para funciones de espacios H^s . De hecho, debido a (4.18), para funciones bastante suaves Ψ y h tenemos

$$\langle \Psi, h \rangle_s = \sum_{\alpha(0)} \left(d_\alpha^{\frac{s+r}{2}} \Psi_\alpha \right) \left(d_\alpha^{\frac{s-r}{2}} h_\alpha \right); \quad \text{desigualdad de Schwartz} \quad (4.31)$$

y por tanto generalizamos la desigualdad de Scharztz

$$|\langle \Psi, h \rangle_s| \leq \|\Psi\|_{s+r} \|h\|_{s-r}; \quad \text{cuando } h = \Psi \quad (4.32)$$

Cuando $h = 4$, se deduce de (4.32)

$$\|\Psi\|_s^2 \leq \|\Psi\|_{s+r} \|\Psi\|_{s-r} \quad (4.33)$$

se sostiene $\forall \Psi \in H^{s+r}$ y $\forall h \in H^{s-r}$, donde $s \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}_0$. En particular tenemos

$$|\langle \Psi, h \rangle| \leq \|\Psi\|_s \|h\|_{-s} \quad (4.34)$$

para todo $\Psi \in H^s$ y para todo $h \in H^{-s}$ ($s \geq 0$).

Ahora obtenemos para espacios H^s dos desigualdades interpoladas bien conocidas en teoría de funciones periódicas [6], [30]. Sean $s, r, t \in \mathbb{R}$; $t \leq r < s$; $a, \rho > 0$ y sea $\Psi \in H^s$. Si tomamos $a = \rho^{1/(s-r)}$ en la desigualdad $1 \leq a^{s-r} + a^{t-r}$ (d_α es el multiplicador (4.17)) entonces tenemos

$$d_\alpha^r \leq \rho d_\alpha^s + \rho^{p/(p-1)} d_\alpha^t.$$

Aquí

$$p = \frac{r-t}{s-t} < 1. \quad (4.35)$$

Tomando en cuenta la Definición 4.2, obtenemos primero la desigualdad interpolada (ρ es un número positivo arbitrario, ver también [2], formula (4.18)):

$$\|\Psi\|_r \leq \rho \|\Psi\|_s + \rho^{p/(p-1)} \|\Psi\|_t \quad (4.36)$$

Si tomamos $\rho = \|\Psi\|_s^{p-1} \cdot \|\Psi\|_t^{1-p}$ en (4.36) entonces obtenemos la segunda desigualdad interpolada

$$\|\Psi\|_r \leq 2 \|\Psi\|_t^{1-p} \|\Psi\|_s^p. \quad (4.37)$$

Ahora le damos la forma común de funcionales lineales continuos en H^s (ver, para instancias, [54]).

LEMA 4.5 *Sea $s \geq 0$. Entonces para toda $h \in H^{-s}$ una forma sesquilineal $G(\Psi) = \langle \Psi, h \rangle$ es una función lineal continua definida en H^s con una norma*

$$\|G\| = \|s\|_{-h} = \|\Psi, h\|_s^{sup} = 1 \quad (4.38)$$

Recíprocamente, cada funcional lineal continua en H^s tiene la forma $\langle \Psi, h \rangle$ donde el elemento $h \in H^{-s}$ es únicamente determinado.

DEMOSTRACIÓN 4.4 Sea $G(\Psi)$ un funcional lineal continua en H^s . Entonces existe un elemento $g \in H^s$ tal que $G(\Psi) = \langle \Psi, g \rangle_s$ y $\|G\| = \|g\|$. Tomamos $h = D^{2s}g$. Debido al Corolario 4.2 el elemento $h \in H^{-s}$. Esto sigue de (4.23) que $\|h\|_{-s} = \|g\|_s$ y

$$G(\Psi) = \langle \Psi, g \rangle_s = \langle \Psi, D^{2s}g \rangle = \langle \Psi, h \rangle.$$

Ahora mostramos la unicidad de tal representación. Suponemos que $G(\Psi) = \langle \Psi, h \rangle = \langle \Psi, z \rangle$, donde $h, z \in H^{-s}$. Entonces tenemos $\langle \Psi, h - z \rangle = 0$. Tomando $\Psi = D^{-2s}(h - z)$, conseguimos $\|h - z\|_{-s} = 0$ y por lo tanto $h = z$.

COMENTARIO 4.4 Para cada $s \in \mathbb{R}$ las funciones

$$W_{s,\alpha} = D^{-s}Y_\alpha = d_\alpha^{-s/2}Y_\alpha \quad (4.39)$$

forman bases ortonormales en H^s y para todo $\Psi \in H^s$

$$\Psi = \sum_{\alpha(0)}^N q_{s,\alpha} W_{s,\alpha} = \sum_{\alpha(0)}^N \Psi_\alpha Y_\alpha, \quad (4.40)$$

donde d_α es determinado por (4.17) y Y_α son eigenfunciones del problema espectral (3.4).

TEOREMA 4.1 [54] Sea $s \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces los operadores limitados $D^{-r} : H^s \mapsto H^s$ y $\Lambda^{-r} : H_0^s \mapsto H_0^s$ son operadores compactos a $r > 0$, operadores Hilbert-Schmidt a $r > 1$ y k -operadores a $r > 2$.¹

DEMOSTRACIÓN 4.5 Los multiplicadores $\chi_\alpha^{-r/2}$ y $d_\alpha^{-r/2}$ en expansiones canónicas (4.14) y (4.16) de operadores Λ^{-r} y D^{-r} tienden a cero si el índice α incrementa. Debido al teorema de [49] los operadores D^{-r} y Λ^{-r} son compactos. Además, ambas series

¹Permitimos Y_i y Ψ_j sean bases ortogonales duales y $\langle Y_i, \Psi_j \rangle = \delta_{ij}$. El operador compacto A definido por

$$Ag = \sum_j \langle Y_j, g \rangle \alpha_j \Psi_j \quad (4.41)$$

es llamado k -operador ($\alpha_j > 0$ para todo j) si $\sum_j \alpha_j < \infty$.

$$\sum_{\alpha(1)} \|\Lambda^{-r} Y_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha(1)} \chi_\alpha^{-r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{[n(n+1)]^r}$$

y

$$\sum_{\alpha(0)} \|D^{-r} Y_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^{-r} = \sum_{\alpha(0)} (1 + \chi_\alpha)^{-r} = 1 + \sum_{\alpha(1)} \|\Lambda^{-r} Y_\alpha\|^2$$

divergen si $r \leq 1$ y convergen a $r > 1$. Se sigue inmediatamente de la comparación de estos con las series $\sum_n n^{-r}$ [?]. Aquí usamos la relación

$$\frac{2n+1}{[n(n+1)]^r} = \frac{1}{n^{r-1}(n+1)^r} + \frac{1}{n^r(n+1)^{r-1}}.$$

ambas series $\sum_{\alpha(1)} X_\alpha^{-r/2}$ y $\sum_{\alpha(0)} d_\alpha^{-r/2}$ convergen a $r > 2$. Como resultado, la validez de las otras afirmaciones del teorema siguen de [49].

COMENTARIO 4.5 Así, podemos definir normas máximas (Schmidt's)

$$\|D^{-r}\|_* = \left\{ \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^{-r} \right\}^{1/2} \quad y \quad \|\Lambda^{-r}\|_* = \left\{ \sum_{\alpha(1)} X_\alpha^{-r} \right\}^{1/2} \quad (4.42)$$

a $r > 1$ y trazos de matrices

$$Spur(D^{-r}) = \sum_{\alpha(0)} d_\alpha^{-r/2}, \quad Spur(\Lambda^{-r}) = \sum_{\alpha(1)} X_\alpha^{-r/2} \quad (4.43)$$

a $r > 2$ de operadores $D^{-r} : H^s \mapsto H^s$ y $\Lambda^{-r} : H_0^s \mapsto H_0^s$ respectivamente. Los valores (4.42) y (4.43) son independientes de la base ortonormal elegida en H^s y H_0^s [28].

El siguiente enunciado es el corolario del Teorema 4.2.

LEMA 4.6 Sea $s \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces cada conjunto M limitado en la norma de H^{s+r} es compacto en la norma de H^s .

DEMOSTRACIÓN 4.6 Consideremos una sucesión $\{\Psi_n\} \subset M$ que débilmente converge en H^{s+r} , y mostramos que $\{\Psi_n\}$ es la secuencia Cauchy en H^s . De hecho, debido a (4.23) tenemos

$$\|\Psi_n - \Psi_m\|_s = \|D^{-r}(\Psi_n - \Psi_m)\|_{s+r}.$$

Pero por el Teorema 4.2 la sucesión $\{D^{-r}\Psi_n\}$ converge en H^{s+r} -norma. Por tanto, $\{\Psi_n\}$ es la secuencia Cauchy en H^s . El lema queda demostrado.

COMENTARIO 4.6 *Es suficiente para probar que el encaje $H^s \hookrightarrow H^t$ es compacto para $t < s$. Entonces la estimación (4.37) implica que el encaje es compacto para todo $r \in (t, s)$. El Lema 4.2 es un caso particular del lemma de Rellich [7].*

LEMA 4.7 *Sea $s > 1$. Entonces el espacio H^s es un círculo normalizado, es decir, si $\Psi, h \in H^s$ entonces $f = \Psi \cdot \in H^s$ y*

$$\|f\|_s \leq C \|\Psi\|_s \|h\|_s, \quad (4.44)$$

donde la constante C depende sólo de s .

Ahora damos un simple lemma sobre un orden de aproximación de una función $\Psi \in H^s$ para una suma finita $T_N\Psi \in \mathcal{P}^N$ [54].

4.3. Rapidez de Convergencia de las Series de Fourier

LEMA 4.8 *Sea $s \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}_+$. Entonces para todo $\Psi \in H^{s+r}$ tenemos la siguiente estimación de mejor aproximación en H^s -norma:*

$$\|\Psi - T_N\Psi\|_s \leq N^{-r} \|\Psi\|_{s+r}. \quad (4.45)$$

En efecto, para todo $\Psi \in H^{s+r}$

$$\begin{aligned} \|\Psi - T_N\Psi\|_s^2 &= \sum_{\alpha(N+1)} d_\alpha^s |\Psi_\alpha|^2 \leq \\ &\leq d_{N+1}^{-r} \cdot \sum_{\alpha(N+1)} d_\alpha^{s+r} |\Psi_\alpha|^2 \leq N^{-2r} \|\Psi\|_{s+r}^2. \end{aligned}$$

La teoría de mejor aproximación de funciones sobre una esfera en espacios Banach $L^p(S)$ ($1 \leq p \leq \infty$) es desarrollado en [25], [27], [40].

COMENTARIO 4.7 ([59]) Para cada polinomio esférico $\Psi \in \mathcal{P}^N$ y para todo $s \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{R}_+$ las desigualdades de Bernstein's (ver [?]).

$$\|\Psi\|_{s+r} = \|D^r \Psi\|_s \leq 3^{r/2} N^r \|\Psi\|_s \quad (4.46)$$

son válidas. Las estimaciones (4.46), (4.22) demuestran la equivalencia de $\|\cdot\|_s$ -norma y $\|\cdot\|_{s+r}$ -norma en un espacio de dimensión finita \mathcal{P}^N . La prueba de la estimada (4.46) es trivial.

4.4. Espacio $C(S)$ de funciones continuas sobre una esfera

Sea $C(S)$ un espacio de Banach de funciones continuas en una esfera S equipada con la norma

$$\|\Psi\|_{C(S)} = \max_{x \in S} |\Psi(x)|. \quad (4.47)$$

Es conocido (ver [21], Teorema 3.4, pp. 36) que si una función $\Psi \in C^\infty(S)$ entonces para cada $s \in \mathbb{R}_+$ las series de Fourier-Laplace de Ψ convergen absolutamente y uniformemente. Entonces

$$\left\| \sum_{n=N}^{\infty} d_n^{s/2} |Y_n(\Psi)| \right\|_{C(S)} \rightarrow 0; \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty \quad (4.48)$$

Ahora, sea Ψ una función que pertenece a un espacio de Banach X . Introducimos las sumas lineales

$$U_N(\Psi; x) = \sum_{k=0}^N a_{kN} Y_k(\Psi; x), \quad (4.49)$$

donde $\{a_{kN}\}$ es una matriz triangular:

$$\begin{aligned} a_{0N} &= 1, & a_{kN} &= 0 \quad \text{si } k > N; \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N; & N &\in \mathbb{Z}_0 \end{aligned}$$

En el problema de aproximación de funciones de un espacio Banach X por sumas lineales (4.49) una de las principales preguntas es la próxima: si la cantidad

$\|U_N(\Psi; x) - \Psi(x)\|_X$ tiende a cero para cada función $\Psi \in X$ o no si N tiende a ∞ ? Los criterios más comunes de convergencia se basan en el teorema de Banach-Steinhaus sobre convergencia débil de una sucesión de funciones lineales continuas sobre X (Ver [29], Teoremas 1*, 2*, pp. 197,198). Para funciones sobre una esfera de un espacio de Hilbert H^s la respuesta es positivo, si $U_N(\Psi; x) = T_N\Psi(x)$ (que es, $a_{kN} = 1\forall k, N$). Sigue inmediatamente de las identidades de Parseval-Steklov's (4.18). En espacios de Banach tales identidades no son válidas y el problema de convergencia es esencialmente complicado.

Ahora consideramos en caso cuando $X = C(S)$ estudiado en algunas investigaciones (ver por ejemplo, [74]). Funciones (4.49) pueden ser representadas en forma de convolución

$$U_N(\Psi; x) = (\Psi * K_N)(x), \quad (4.50)$$

donde la función zonal K_N esta dada por

$$K_N(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \sum_{k=0}^N a_{kN} (2k+1) P_k(\vec{x} \cdot \vec{y}). \quad (4.51)$$

TEOREMA 4.2 ([74], pp. 82) Sea una función $\Psi \in C(S)$. Entonces una sucesión $U_N(\Psi; x)$ converge en el punto $x \in S$ a $\Psi(x)$, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_N(\Psi; x) = \Psi(x), \quad (4.52)$$

si y solo si las siguientes dos condiciones son satisfechas:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_{kN} = 1, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.53)$$

$$\int_{-1}^1 |K_N(\mu)| d\mu \leq C_0, \quad (4.54)$$

donde la constante C_0 no depende de N y μ , donde $\mu = \sin \Psi = (\vec{x}, \vec{y})$ es coordenada geográfica con el punto x como su polo.

DEMOSTRACIÓN 4.7 Si $x \in S$ es fijo entonces los elementos $U_N(\Psi; x)$ y $\Psi(x)$ pueden ser considerados como funciones lineales continuas sobre $C(S)$. Acordando un criterio Banach-Steinhaus tenemos que (4.52) es válida si y solo si (4.52) se sostiene para

todos los armónicos esféricos $Y_\alpha(x)$ (que son bases en $C(S)$) y normas de las funciones $U_N(\Psi; x)$ se limitan uniformemente para todo N . Pero la validez de (4.52) para cada armónico esférico implica (4.53). Además, calculamos la norma de las funciones $U_N(\Psi; x)$:

$$\|U_N\|_C = \limsup_{\|\Psi\|_{C(S)} \leq 1} |U_N(\Psi; x)| = \frac{1}{4\pi} \int_S |K_N(\vec{x} \cdot \vec{y})| dS(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |K_N(\mu)| d\mu. \quad (4.55)$$

De, los límites uniformes de normas de $U_N(\Psi; x)$ en N significa que (4.54) se satisface. El teorema es probado.

Es fácil ver que (4.52) implica convergencia uniforme de $U_N(\Psi; x)$ a $\Psi(x)$ sobre la esfera S . De hecho (ver [74], pp. 82), para cada función $\Psi \in C(S)$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un polinomio esférico $\mathcal{F} = \sum_{\alpha(0)}^M b_\alpha Y_\alpha \in \mathcal{P}^M$ tal que $\|\Psi - \mathcal{F}_M\|_{C(S)} < \varepsilon$. Seguimos de (4.54), (4.55) que

$$\begin{aligned} \|\Psi - U_N(\Psi)\|_{C(S)} &\leq \|\Psi - \mathcal{F}_M\|_{C(S)} + \\ &+ \|\mathcal{F}_M - U_N(\mathcal{F})\|_{C(S)} + \|U_N(\Psi - \mathcal{F}_M)\|_{C(S)} \leq \\ &\leq (1 + 2C_0)\varepsilon + \sum_{\infty(0)}^M \|Y_\alpha - U_N(Y_\alpha)\|_{C(S)}, \end{aligned}$$

donde debido a (4.52), (4.53) el último término del lado derecho puede ser menor que ε para un número N suficientemente grande.

Así, las condiciones (4.53) y (4.54) completamente resuelven el problema de convergencia uniforme de sumas lineales (4.49) a funciones continuas Ψ sobre una esfera.

Si usamos en (4.49) la suma Cesaro (C, α) ($\alpha > -1$; ver [59]) de las series (4.13) entonces el kernel k_n en (4.51) tendrá la siguiente forma

$$K_N^\alpha(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{1}{C_{N+\alpha}^\alpha} \sum_{n=0}^N (2n+1) C_{N+\alpha-n}^\alpha P_n(\vec{x} \cdot \vec{y}). \quad (4.56)$$

Aquí C_k^α es el coeficiente binomial. El próximo teorema da estimados de k_N para valores diferentes de α .

TEOREMA 4.3 (de Gzonwall [59]) Sea

$$L_N^\alpha = \int_{-1}^1 |K_N^\alpha(\mu)| d\mu. \quad (4.57)$$

Entonces

$$L_N^\alpha \asymp N^{\frac{1}{2}-\alpha} \quad a \quad \alpha < \frac{1}{2},$$

$$L_N^\alpha \asymp \ln N \quad a \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

$$0 < L_N^\alpha < C \quad a \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Aquí \asymp es el simbolo de equivalencia. La prueba del Teorema 4.4 para el caso común de una esfera multidimensional esta dada en [74] (Teorema 3.3).

Si seguimos del Teorema 4.4 que la secuencia de sumas finitas $T_N\Psi$ de series de Fourier de Ψ no convergen a Ψ para una función arbitraria Ψ de espacio $C(S)$. De hecho, este caso el kernel $S_N(\vec{x} \cdot \vec{y}) = k_N^0(\vec{x} \cdot \vec{y})$ y debido al Teorema 4.4 la condición (4.54) del Teorema 4.4 no se satisface. Por el teorema de Banach-Steinhaus existen funciones tales $\Psi(x)$ en $C(S)$ que $T_N\Psi(x)$ que no hacen converger a $\Psi(x)$ en la norma (4.47). Es más, las normas (4.55) de funcionales $U_N(\Psi)$ no se limitan ahora. Por tanto para cada punto $x \in S$ existe una función $\Psi \in C(S)$ cuya serie Fourier-Laplace diverge en el punto x . Sin embargo, debido al Teorema 1.5, la suma principal arimética o sumas de Cesaro $(C, 1)$

$$U_N(\Psi; x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N T_N\Psi(x) = (\Psi * K_N^1)(x) \quad (4.58)$$

de series (4.13) convergen a $\Psi(x)$ uniformemente para todo $\Psi \in C(S)$.

En conclusión daremos tres defniciones y una declaración sobre la relación entre el grado de suavidad de una función sobre una esfera y el orden de su mejor aproximación por sumas esféricas (ver [8], [33]).

DEFINICIÓN 4.14 *Para cada función $\Psi \in C(S)$ un operador de traslación esférica S por un ángulo h es definido por*

$$S_h\Psi(x) = \frac{1}{2\pi \sin h} \oint_{\rho(x,y)=h} \Psi(y) dy. \quad (4.59)$$

Aquí $\rho(x, y)$ es la métrica interna (3.12) sobre una esfera, y la integración es llevada a cabo sobre el conjunto de puntos tales que $y \in S$ que el ángulo entre dos radio vectores unitarios \vec{x} y \vec{y} son iguales a h .

DEFINICIÓN 4.15 Llamamos una cantidad

$$\omega_{\Psi}(\gamma) = \sup_{h \leq \gamma} \|\Psi(x) - S_h \Psi(x)\|_{C(S)} \quad (4.60)$$

un modulo de continuidad de una función $\Psi(x) \in C(S)$.

En conexión con propiedades de módulos de continuidad ver, para instancias, [14], [30].

DEFINICIÓN 4.16 Decimos que una función continua Ψ pertenezca a una clase de $Lip(\alpha)$ de funciones Lipschitz sobre una esfera ($0 < \alpha < 2$) si

$$\omega_{\Psi}(\gamma) \leq M\gamma^{\alpha} \quad (4.61)$$

Si $\alpha = 2$ entonces

$$\omega_{\Psi}(\gamma) \leq M \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) \ln\left(1/\sin^2\frac{\gamma}{2}\right). \quad (4.62)$$

Si $\alpha > 2$ entonces $\Delta\Psi = 0$ y $\Psi = \text{constante}$.

TEOREMA 4.4 ([33], Teorema 4-6) Sea $p \in \mathbb{Z}_0$ y $\Psi(x) \in C(S)$. Entonces $\Delta^p\Psi \in Lip(\alpha)$ si y solo si existe una suma esférica $U_N(\Psi; x)$ de \mathcal{P}^N tal que

$$\|\Psi(x) - U_N(\Psi; x)\|_{C(S)} \leq M \cdot N^{-(2p+\alpha)}. \quad (4.63)$$

La mejor teoría de aproximación de funciones continuas sobre una esfera es desarrollada en [8], [14], [27], [41].

Capítulo 5

Dinámica de Fluidos Ideales sobre una Esfera

Los movimientos de fluidos incompresibles no viscosos sobre una esfera rotando en dos dimensiones son descritos por la ecuación de vorticidad que toma en cuenta importantes procesos dinámicos tales como interacciones no lineales, dispersión y rotación de la esfera. Las soluciones satisfacen infinito número de leyes integrales de conservación. Debido a su simplicidad relativa es un modelo matemático para el estudio de la dinámica de fluidos no lineales.

Un gran número de trabajos de investigación fueron llevados a cabo en el contexto de este modelo en tales problemas importantes como:

- a) el mecanismo de interacción no lineal [9], [10], [15], [17], [26], [32], [44];
- b) la construcción de soluciones exactas tales como ondas de Rossby-Haurwitz [20],[24], [42], [50] y modons [37], [46];
- c) la estabilidad de las soluciones con respecto a perturbaciones infinitésimas [18], [23], [42], [62]-[67] y pequeñas perturbaciones finitas ([3], [4], [11], [12], [13]);
- d) el mecanismo de propagación de trenes de onda de Rossby estacionarios a lo largo del rayo de velocidad de grupo ([22]);
- e) las dinámicas de ondas solitarias ([37], [38], [68]) y otros.

Este capítulo es principalmente dedicado al estudio de soluciones de la ecuación de vorticidad, a la dinámica de perturbaciones de tales soluciones, y a las leyes de

conservación principales para la dinámica de fluidos no viscosos sobre una esfera. son considerados en la Sección 1. El teorema de existencia y unicidad de una solución egneralizada esta dado en la Sección 2. El teorema toma en cuenta las fuentes de vorticidad externa. Además, la bien conocida clase de soluciones de onda diferenciables infinitamente incluyendo todas las ondas de Rossby-Haurwitz, son descritas.

5.1. Las Leyes de Conservación Principales

Sea que consideremos el problema de la dinámica de un fluido incomprensible no viscoso sobre la esfera unitaria S :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = 0, \quad (5.1)$$

$$\Delta \Psi(0, x) = \Delta \Psi^0(x). \quad (5.2)$$

La ecuación (5.1) expresa la conservación de vorticidad absoluta $\Delta \Psi + 2\mu$. El problema (5.1), (5.2) posee un infinito numero de integrales de las leyes de conservación [11] [43] [59]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \Delta \Psi dS = 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} K = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\nabla \Psi\|^2 = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\Delta \Psi\|^2 = 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S G(\Omega) dS = 0, \quad (5.6)$$

donde $G(\Omega)$ es una función diferenciable arbitraria de Ω ,

$$\Omega = \Delta \Psi + 2\mu \quad (5.7)$$

es la vorticidad absoluta, $K(t)$ es energía cinética total y $\xi(t)$ es la integral de entropía. Por tanto

$$\int_S \mu \Delta \Psi dS = - \int_S \nabla \mu \cdot \nabla \Psi dS = \int_S u \sqrt{1 - \mu^2} dS, \quad (5.8)$$

la ecuación (5.3) es la integral de la ley de conservación de la velocidad de rotación angular de un fluido sobre el eje Polar. La validez de (5.1) las forman las ecuaciones y (2.2.14) de [59]:

$$\langle J(\psi, f), h \rangle = \langle J(f, h), \psi \rangle = -\langle J(\psi, h), f \rangle \quad (5.9)$$

$$J(\psi, \Lambda^r \psi) = 0 \quad (5.10)$$

$$\langle J(\psi, \mu), \Lambda^r \psi \rangle = 0 \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mu \Delta \Psi dS &= \langle \Delta \Psi_t, \mu \rangle = -\langle J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu), \mu \rangle = \\ &\langle J(\mu, 2\mu), \Delta \Psi \rangle + \langle J(\Psi, \mu), \Delta \Psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

La ecuación (5.4) sostiene que debido a

$$\langle J(\psi, h), \bar{\psi}^r \rangle = 0 \quad (5.12)$$

de [59]

$$\frac{\partial}{\partial t} K = -\langle \Delta \Psi_t, \Psi \rangle = \langle (\Psi, \Delta \Psi + 2\mu), \Psi \rangle = 0.$$

La existencia de la ley (5.5) sigue de (5.12), (5.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = \langle \Delta \Psi_t, \Delta \Psi \rangle = \langle J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu), \Delta \Psi \rangle = 0.$$

Debido a (5.12) la ley (5.6) es también válida. De hecho,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S G(\Omega) dS = \langle \Omega_t, G'(\Omega) \rangle = \langle J(\Omega, \Psi), G'(\Omega) \rangle = 0.$$

Usando las leyes de conservación (5.4), (5.5) para energía y entropía, Fjortoft muestra que el intercambio de energía siempre da lugar a pérdidas entre tres subespacios diferentes \mathcal{H}_n [15]. Además, si $\ell \leq m \leq n$ entonces existen solo dos caminos para el intercambio de energía:

$$\circ \quad \mathcal{H}_\ell \rightarrow \mathcal{H}_m \leftarrow \mathcal{H}_n \quad \text{ni} \quad \mathcal{H}_\ell \leftarrow \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_n,$$

donde las flechas muestran la dirección de transferencia de la energía cinética de un subespacio a otro. La interacción resonante no lineal de triadas de armónicos

esféricos es caracterizado por los coeficientes de interacción no lineal. Los estimados estadísticos muestran que alrededor del 70 % de eventos de triadas interactuando, la mayor parte de la energía es transmitida a ondas más grandes [44]. La situación es una casi conversión del flujo de entropía: en alrededor del 60 % de eventos de triadas interactuando la mayor parte del flujo de entropía es dirigido a ondas más cortas.

De

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} K_n, \quad \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n K_n, \quad (5.13)$$

donde K_n es la parte de la energía cinética distribuida en el subespacio \mathcal{H}_n , las ecuaciones (5.4), (5.5) implican la conservación del número espectral principal χ_a :

$$\chi_a(t) = \xi(t) K(t) = \text{const.} \quad (5.14)$$

De acuerdo a esta ley la energía $K(t)$ no puede ser redistribuida, así que para estar totalmente concentrada solo en un grupo de ondas de escala pequeña (esto es, en el subespacio \mathcal{H}_n con $\chi_n > \chi_a$) o solo en un grupo de ondas de gran escala (esto es, en subespacios \mathcal{H}_n con $\chi_n < \chi_a$).

TEOREMA 5.1 [15] *Sea K la energía cinética total y $N \in \mathbb{N}$. Sea χ_a el número espectral principal de una solución del problema (5.1), (5.2). Definimos $a(t)$ y $b(t)$ por*

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=1}^N \chi_n K_n(t) / \sum_{n=1}^N K_n(t), \\ b(t) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \chi_n K_n(t) / \sum_{n=N+1}^{\infty} K_n(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde $K_n(t)$ es la parte de energía cinética distribuida en \mathcal{H}_n . Entonces una parte de de la energía cinética distribuida en el subespacio $\oplus_{n=N+1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ es igual a

$$R_N(t) \equiv \frac{1}{K} \sum_{n=N+1}^{\infty} K_n(t) = \frac{\chi_a - a(t)}{b(t) - a(t)}. \quad (5.16)$$

Note que el límite superior en (5.16) son alcanzados cuando $a(t)$ y $b(t)$ son iguales a sus valores admisibles mínimos. Por tanto, en el importante caso particular cuando $\chi_a \leq \chi_L \leq \chi_N$ (esto es, la energía cinética es principalmente distribuida en una parte

de gran escala del espectro) una parte de la energía la cual puede ser concentrada en pequeñas escalas esta limitada por:

$$R_N(t) \leq \frac{\chi_L - a(t)}{\chi_{N+1} - a(t)}. \quad (5.17)$$

Por ejemplo [59], si la energía total de una solución es distribuida en el momento inicial en \mathcal{H}_2 ($K_2 = K$, $L = 2$) entonces $a = \chi_2$ y la energía será concentrada solo en \mathcal{H}_2 para todo $t > 0$.

5.2. Soluciones de Onda Diferenciables Infinitamente de la Ecuación de Vorticidad

En esta sección describimos la clase de soluciones exactas de la ecuación (5.1). Pero previamente obtuvimos el teorema de existencia y unicidad del problema generalizado

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi + J(\Psi, \Delta \Psi) = F, \quad \Psi(0, x) = \Psi^0(x) \quad (5.18)$$

que es equivalente al problema de Euler para un fluido bidimensional sobre una esfera.

TEOREMA 5.2 (*Szeptycki [72]*) *Asumimos una función inicial $\Psi^0(x) \in H_0^2 \cap L^\infty(S)$ y una fuente de vorticidad externa $F(t, x) \in L^2(0, T; H_0^1) \cap L^\infty(Q)$. Entonces existe la solución única $\Psi(t, x)$ del problema (5.18) tal que*

$$\Psi \in L^\infty(0, T; H_0^2), \quad \Delta \Psi \in L^\infty(Q), \quad \Psi_t \in L^\infty(0, T; H_0^1) \quad (5.19)$$

y

$$-\int_0^T [\langle \Delta \Psi, h_t \rangle + \langle J(\Psi, h), \Delta \Psi \rangle] dt = \langle \Delta \Psi^0, h(0, x) \rangle + \int_0^T \langle F, h \rangle dt \quad (5.20)$$

se sostiene para todo $h \in L^2(0, T; H_0^2)$ satisfaciendo las siguientes condiciones: $h(T, x) = 0$ y $h_t \in L^2(0, T; H_0^1)$.

La demostración del Teorema 5.2 se basa en el método de viscosidad [72].

COMENTARIO 5.1 Las únicas soluciones del problema (5.1), (5.18) siguen inmediatamente del Teorema 5.2 porque el término $2\Psi_\lambda$ describiendo la rotación de la esfera S puede ser excluido por una elección de un sistema coordenado rotado, donde

$$\Psi(t, \lambda', \mu) = \Psi(t, \lambda, \mu) - \mu. \quad (5.21)$$

La clase más común de soluciones periódicas exactas de la ecuación de vorticidad (5.1) fue, obtenida en [73]:

$$\Psi(t, \lambda, \mu) = y(\lambda', \mu') - \omega\mu + \Psi_0. \quad (5.22)$$

Aquí, Ψ_0 es una constante arbitraria, $Y(x)$ es una eigenfunción del operador Laplace-Beltrami:

$$-\Delta Y = \chi Y,$$

χ es el eigenvalor correspondiente, el término $-\omega\mu$ representa la rotación de un cuerpo sólido del fluido sobre el eje polar del sistema coordenado (λ, μ) y las coordenadas primas se refieren a un sistema coordenado, cuyos polos $N' = (\lambda_0, \mu_0)$ se mueven a lo largo de un círculo de latitud $\mu = \mu_0$ con velocidad angular constante C , dada por la relación de dispersión

$$C = \omega - 2(\omega + 1)/\chi. \quad (5.23)$$

La solución (5.22) describe una configuración en cuya estructura $Y(\lambda', \mu')$ se mueve con rapidez constante y sin cambio de tamaño y forma a través de un flujo zonal $\Psi = -\omega\mu$.

Ahora probemos que la función (5.22) es una solución de la ecuación (5.1) (la demostración detallada de esta declaración se puede ver en [75]). En efecto, tenemos (ver (3.16)-(3.18))

$$\lambda' = \lambda'(\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0), \quad \mu' = \mu'(\lambda, \mu, \lambda_0, \mu_0) \quad (5.24)$$

donde el polo N' movido tiene coordenadas

$$\lambda_0 = ct, \quad \mu_0 = \text{const.} \quad (5.25)$$

Note que

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda_0} = -\frac{\partial \mu'}{\partial \lambda} \quad (5.26)$$

y

$$\Delta' \Psi (\lambda', \mu') = \Delta \Psi (\lambda, \mu) \quad (5.27)$$

para cada punto $x = (\lambda, \mu) = (\lambda', \mu')$. Aquí Δ' esta dada por (3.4) pero con λ y μ reemplazado por λ' y μ' . La validez de (5.26) sigue de la estructura de las formulas (3.16)-(3.18), donde λ ocurre solo en la forma $\lambda - \lambda_0$. En el momento que Δ es un operador diferencial, este tiene la misma forma en todos los sistemas coordenados que tienen la misma estructura métrica, esto es (5.27) es también valida. Así, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -C \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi \quad (5.28)$$

para cualquier función $\Psi(\lambda', \mu')$ cuya dependencia del tiempo se debe solo a la dependencia del tiempo de λ' y μ' como se implica por (5.24) y (5.25). De hecho,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda'} \frac{\partial \lambda'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mu'} \frac{\partial \mu'}{\partial t}. \quad (5.29)$$

Usando (5.25) obtenemos

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda_0} \frac{\partial \lambda_0}{\partial t} = -C \frac{\partial \lambda'}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mu'}{\partial t} = -C \frac{\partial \mu'}{\partial \lambda}. \quad (5.30)$$

Las formulas (5.29), (5.30) implican (5.28). Debido a (5.27), (5.28) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \Psi = C \chi \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi, \quad (5.31)$$

$$J(\Psi, \Delta \Psi + 2\mu) = [2 + \omega(2 - \chi)] \frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi. \quad (5.32)$$

Así, la función (5.22) es una solución de la ecuación (5.1), si la condición (5.23) es satisfecha.

COMENTARIO 5.2 La solución exacta de la ecuación de vorticidad (5.1), si la condición (5.23) es satisfecha en por

$$\Psi(t, x) = \sum_{k=-1}^1 b_k(t) Y_1^k(x) + \sum_{m=-n}^n a_m(t) Y_n^m(x) \quad (5.33)$$

puede ser también reducida a la forma (5.22) para elegir un sistema coordenado conveniente. Note que las relaciones

$$J(Y_1^0, Y_n^m) = -im \sqrt{\frac{3}{4\pi}} Y_n^m, \quad (5.34)$$

$$J(Y_1^k, Y_n^m) = i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} A_k Y_n^{m+k}, \quad (k = \pm 1) \quad (5.35)$$

son validas para armónico esférico arbitrario $Y_n^m (|m| \leq n)$. Aquí las constantes A_1 y A_2 son determinadas por

$$A_1 = [(n-m)(n+m+1)]^{1/2}, \quad A_{-1} = [(n+m)(n-m+1)]^{1/2}. \quad (5.36)$$

Estas formulas siguen de (3.3), (2.14), (2.15) y (2.1.3). Así, sustituyendo (5.33) en la ecuación no lineal (5.1) obtenemos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias encontrando los coeficientes de Fourier $a_m(t)$ y $b_k(t)$.

Se ve fácilmente que la combinación lineal de cualquier solución exacta $\tilde{\Psi}$ y $\hat{\Psi}$ de la ecuación (5.1) también sera solución si y solo si la ecuación

$$J(\tilde{\Psi}, \Delta \hat{\Psi}) = J(\Delta \Psi, \hat{\Psi}) \quad (5.37)$$

se satisface. Note que para una solución Ψ de la forma (5.5) las relaciones

$$\Delta \Psi = -\chi \Psi + (2 - \chi) \omega \mu + \chi \Psi_0, \quad (5.38)$$

$$J(\Psi, \Delta \Psi) = (2 - \chi) \omega \Psi_\lambda = -(C\chi + 2) \Psi_\lambda \quad (5.39)$$

se sostiene debido a (5.23) y (5.32). Por tanto, para las soluciones (5.22) la condición (5.37) tiene la forma

$$(\tilde{\chi} - \hat{\chi}) Y(\tilde{\Psi}, \hat{\Psi}) + (2 - \hat{\chi}) \hat{\omega} \tilde{\Psi}_\lambda + 2(2 - \tilde{\chi}) \tilde{\omega} \hat{\Psi}_\lambda = 0 \quad (5.40)$$

donde $\tilde{\chi}, \tilde{\omega}$ y $\hat{\chi}, \hat{\omega}$ son parámetros de las soluciones $\tilde{\Psi}$ respectivamente.

PROPOSICIÓN 5.1 *La combinación lineal de cualquiera de dos soluciones de la ecuación de vorticidad (5.1) de la clase (5.22) es también una solución de (5.1) si por lo menos una de las siguientes condiciones es satisfecha.*

1. $\tilde{\omega} = \hat{\omega} = 0$ y $\tilde{\chi} = \hat{\chi}$;
2. $\tilde{\chi} = \hat{\chi} = 2$, esto es, $\tilde{\Psi}, \hat{\Psi} \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$;
3. $\tilde{\Psi}(\mu)$ y $\hat{\Psi}(\mu)$ son flujos zonales arbitrarios.

Obviamente, todos los tres casos son triviales y no de gran interés.

Note que cualquier onda Rossby-Haurwitz

$$\Psi(t, \lambda, \mu) = -\omega\mu + \sum_{m=-n}^n a_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) e^{-imC_n t} \quad (5.41)$$

en el caso particular de la onda (5.22) bajo las restricciones siguientes [59]:

- a) *El polo N' del sistema coordenado primo coincide con el polo N , esto es, $\mu_0 = 1$;*
- b) *La eigenfunción $Y(\lambda, \mu)$ representa un polinomio esférico uniforme de \mathcal{H}_n (combinación lineal de armónicos esféricos de grado n), esto es, $\chi = \chi_n$, donde n es entero;*
- c) *La constante $\Psi_0 = 0$ en (5.22).*

Sigue de la relación de dispersión (5.23) esto si la rotación del cuerpo solido es igual a $-\omega\mu$ entonces la velocidad angula de las ondas de Rossby-Haurwitz $C_n = \omega - 2(\omega + 1)\chi_n$ varia discretamente dentro del intervalo $[-1, \omega]$. Note que C_n es la función incrementada con respecto a n si $\omega > -1$ y con respecto a ω si $n > 1$. Además, si n es fijo entonces oscilaciones a bajas frecuencias corresponden a m numeros de onda zonales más pequeños.

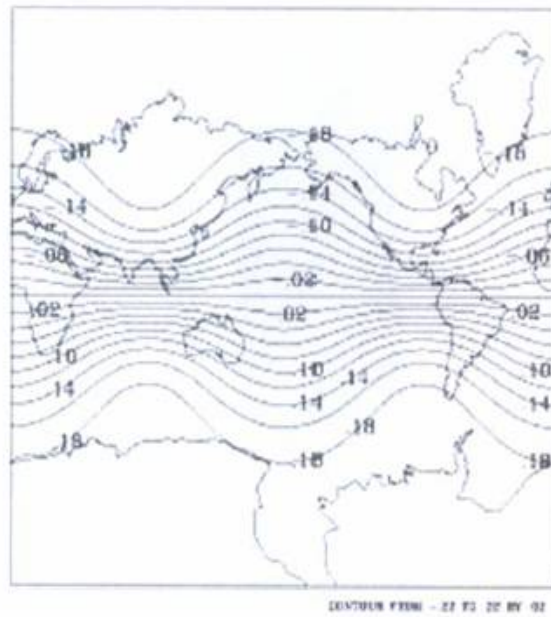


Figura 5.1: Onda de Rossby-Haurwitz típica

Capítulo 6

Sobre el Problema Espectral en el Estudio de Estabilidad Lineal de Flujos sobre una Esfera

6.1. Estabilidad de modo normal

Como se sabe [59], la dinámica barotrópica de gran escala de la atmósfera puede ser aproximadamente descrita por la ecuación de vorticidad barotrópica no lineal (EVB) para un fluido ideal sobre una esfera unitaria rotando:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi + 2\mu) = 0 \quad (6.1)$$

donde $\psi(x)$ es la streamfunction, y $x = (\lambda, \mu)$ es un punto de S .

Brevemente se describirá el método de modos normales usados para el estudio de inestabilidad normal de flujos continuos en dos dimensiones en un fluido incomprensible sobre una esfera unitaria rotando S .

El movimiento de tal fluido es descrito por la ecuación de vorticidad no dimensional no lineal [54]

$$\Delta \psi_t + J(\psi, \Delta \psi + 2\mu) = -\sigma \Delta \psi + \nu (-\Delta)^{s+1} \psi + f \quad (6.2)$$

escrito en coordenadas geográficas (λ, μ) , donde λ es la longitud, $\mu = \sin \theta$ (θ es la latitud), $\Delta \psi(x, t)$ es la vorticidad relativa, $\psi(x, t)$ es la streamfunction, $\Delta \Psi + 2\mu$ es la vorticidad absoluta, $f(x, t)$ es la fuerza

$$J(\psi, h) = (\vec{n} \times \nabla\psi) \cdot \nabla h = \psi_\lambda h_\mu - \psi_\mu h_\lambda \tag{6.3}$$

es el Jacobiano, \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie de la esfera S , y

$$\nabla h = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} h_\lambda, \sqrt{1-\mu^2} h_\mu \right) \tag{6.4}$$

es el gradiente de la función h . Los términos $J(\psi, 2\mu) = 2\psi_{\lambda\mu}$, $\sigma\Delta\psi$ y $\nu(-\Delta)^{s+1}$ describen la rotación de la esfera, el arrastre lineal (fricción Rayleigh) y viscosidad turbulenta, respectivamente ($\sigma > 0, \nu > 0$). El orden $s = 1$ corresponde al termino de viscosidad en las ecuaciones de Navier Stokes [34], mientras el orden $s = 2$ fue usado en [12],[13], [53], [54]. Los numeros naturales s fueron introducidos por Lions [39]. Consideraremos el caso general de un orden real $s : s \geq 1$.

Después asumimos que ambas la fuerza $f(x, t)$ y la solución $\psi(x, t)$ del problema (6.1) son ortogonales a una función constante sobre la esfera S [59]:

$$\int_S f(x) dx = 0, \quad \int_S \psi(x) dx = 0. \tag{6.5}$$

Sea $\psi(x, t) = \Psi(x) + \phi(x, t)$, donde $\Psi(x)$ es la streamfunction de un flujo básico y $\phi(x, t)$ es su perturbación. Las dinámicas de perturbación infinitesimal es descrita por la ecuación linealizada.

$$\zeta_t = \mathcal{L}\zeta, \tag{6.6}$$

donde

$$\mathcal{L}\zeta \equiv J(\Omega, \Delta^{-1}\zeta) - J(\Psi, \zeta) - [\sigma + \nu(-\Delta)^s]\zeta; \quad \zeta = \mathcal{L}(\psi) \tag{6.7}$$

es el operador lineal definido sobre funciones complejas valuadas suficientemente suaves, $\Omega = \Delta\psi + 2\mu$ es la vorticidad absoluta del flujo básico, y $\zeta(x, t) \equiv \Delta\phi(x, t)$ es la vorticidad relativa de la perturbación.

El método de modo normal sugiere para (6.6) una solución de la forma

$$\zeta(x, t) = G(x) \exp \{ \omega t \}, \tag{6.8}$$

donde ω y $G(x)$ son el eigenvalor y la eigenfunción del problema espectral.

$$\mathcal{L}G(x) = \omega G(x) \quad (6.9)$$

para el operador (6.7). El modo (6.8) se dice que es estable si $\text{Re}\omega \leq 0$, inestable si $\text{Re}\omega > 0$, y neutral si $\text{Re}\omega = 0$.

El producto interno y la norma de funciones sobre S esta definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_S f \bar{g} dx = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} f \bar{g} dx \quad (6.10)$$

y

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}, \quad (6.11)$$

respectivamente, donde $\overline{g(x)}$ es el complejo conjugado de $g(x)$. Usamos el método espectral [43], [52], [53] cuando ambos, la solución $\tilde{\psi}$ y la perturbación ψ son expandidas en series infinitas de los armónicos esféricos ortonormales $Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu)e^{im\lambda}$ de grado n y numero de onda zonal m [21], [74]. Aquí $P_n^m(\mu)$ es la función de Legendre asociada de grado n y numero de onda zonal m . Sin perder generalidad, suponemos que una solución de la ecuación (6.1) es ortogonal a una constante sobre la esfera S :

$$\langle \psi, 1 \rangle = \int_S \psi(x) dx = 0. \quad (6.12)$$

Denotamos por \mathcal{P}^N un subespacio de polinomios esféricos de grado N generado por armónicos esféricos $N(N+2)$ con $-n \leq m \leq n$ y $n = 1, 2, \dots, N$. En orden para construir la matriz representando el operador \mathcal{L} del problema (9)-(10) en el subespacio \mathcal{P}^N , asumimos que $\tilde{\psi}(x)$ pertenece a \mathcal{P}^M , y $\psi(x, t)$ y $\zeta(x, t) = \Delta\psi(x, t)$ pertenece a $\mathcal{P}^N (M < N)$, esto es,

$$\tilde{\psi} = \sum_{\beta}^M \tilde{\psi}_{\beta} Y_{\beta}, \quad \psi = \Delta^{-1}\zeta = - \sum_{\alpha}^N X_{\alpha}^{-1} \zeta_{\alpha} Y_{\alpha}, \quad \zeta = \sum_{\alpha}^N \zeta_{\alpha} Y_{\alpha}. \quad (6.13)$$

Por causa de simplicidad, después usamos las siguientes notaciones ampliamente usadas por Platzman [47]: $\alpha = (m_{\alpha}, n_{\alpha})$. Así, con $k = m_{\alpha}$ y $j = n_{\alpha}$ tenemos

$$Y_{\alpha} = P_j^k(\mu) e^{ik\lambda}, \quad X_{\alpha} = j(j+1), \quad \zeta_{\alpha} = \zeta_j^k \quad (6.14)$$

y

$$\sum_{\alpha}^N = \sum_{j=1}^N \sum_{k=-J}^J. \quad (6.15)$$

Sustituyendo (6.13) en (6.6) y tomando el producto interno de la ecuación obtenida con un armónico Y_{α} , tenemos

$$\frac{d}{dt}\zeta_{\alpha} = \langle \mathcal{L}\zeta, Y_{\alpha} \rangle = \int_S (\mathcal{L}\zeta) \overline{Y_{\alpha}} ds = \sum_{\gamma}^N L_{\alpha\gamma} \zeta_{\gamma}, \quad (6.16)$$

donde

$$L_{\alpha\gamma} = \langle \mathcal{L}Y_{\gamma}, Y_{\alpha} \rangle \quad (6.17)$$

es el elemento de la matriz L representando el operador \mathcal{L} en el subespacio \mathcal{P}^N .

$$\mathcal{L}\zeta = -J(\tilde{\psi}, \zeta) - J(\Delta^{-1}\zeta, \tilde{\Omega}) \quad (6.18)$$

Sustituyendo (6.18) en (6.17) obtenemos

$$L_{\alpha\gamma} = -\left\langle J\left(\tilde{\psi} + X_{\gamma}^{-1}\tilde{\Omega}, Y_{\gamma}\right), Y_{\alpha}\right\rangle. \quad (6.19)$$

Así, en subespacio \mathcal{P}^N , el problema (6.6) es reducido a

$$\frac{d}{dt}\vec{\zeta} = L\vec{\zeta}. \quad (6.20)$$

El elemento de la matriz (6.19) puede ser escrito como

$$L_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta}^M (X_{\beta}^{-1} - X_{\gamma}^{-1}) B_{\beta\alpha\gamma} \tilde{\zeta}_{\beta} + i2m_{\gamma} X_{\gamma}^{-1} \delta_{\alpha\gamma}, \quad (6.21)$$

donde $\delta_{\alpha,\gamma}$ es la matriz identidad [59], donde

$$B_{\beta\alpha\gamma} = \langle J(Y_{\beta}, Y_{\gamma}), Y_{\alpha} \rangle \quad (6.22)$$

es la triada no lineal del coeficiente de interacción [43]. Buscando una perturbación infinitesimal en la forma de un modo normal

$$\psi(x, t) = \Psi(x) e^{\omega t}, \quad \zeta(x, t) = \Delta\Psi(x) e^{\omega t} \quad (6.23)$$

sigue al problema espectral

$$\mathcal{L}V = \omega V. \quad (6.24)$$

para el operador \mathcal{L} donde $\omega = \omega_r + i\omega_i$ es el eigenvalor, y $V(x) = \Delta\Psi(x)$ es la eigenfunción correspondiente. La streamfunction de modo normal puede ser escrita como

$$\psi(x, t) = |\Psi(x)| e^{\omega_r t} e^{i(\theta + \omega_i t)}, \quad (6.25)$$

donde

$$\Psi(x) = \Psi_r(x) + i\Psi_i(x) = |\Psi(x)| e^{i\theta} \quad (6.26)$$

es la amplitud, y $\theta \equiv \theta(x) = \arg \Psi(x)$ es la fase inicial del modo. Así, un modo (6.23) [o (6.25)] es inestable si $\omega_r > 0$, decayendo si $\omega_r < 0$, neutral si $\omega_r = 0$, y estacionario si $\omega_i = 0$. El tiempo de e-plegamiento τ_e y periodo T del modo son determinados (en días) como $\tau_e = 1/2\pi|\omega_r|$ y $T = 1/|\omega_i|$, respectivamente.

El problema espectral diferencial (6.24) es reducido al problema espectral discreto

$$L\vec{v} = \omega\vec{v}$$

en el subespacio \mathcal{P}^N con el eigenvector $\vec{v} = \{V_\gamma\} = \{-X_\gamma\Psi_\gamma\}$ cuyos componentes son coeficientes de Fourier V_γ de la eigenfunción V con $n_\gamma \leq N$.

Note que

$$\tilde{\Omega} = \Delta\tilde{\Psi} + 2\mu = -X_n\tilde{\Psi} \quad (6.27)$$

para una onda de RH estacionaria [63], y elementos de la matriz (6.19) son

$$L_{\alpha\gamma} = (X - nX_\gamma^{-1} - 1) \left\langle J(\tilde{\Psi}, Y_\gamma), Y_\alpha \right\rangle. \quad (6.28)$$

6.2. Operador Espectral para un Fluido Viscoso

Ahora mostraremos que para un fluido viscoso, la resolvente del operador (6.7) del problema espectral (6.9) es compacto.

TEOREMA 6.1 ([71]) Sea $s \geq 1$, $\nu > 0$ y sea $\Psi(x)$ un flujo básico sobre la esfera S tal que

$$\max_{x \in S} |\nabla \Psi(x)| \leq C_1, \quad \max_{x \in S} |\nabla \Omega(x)| \leq C_2. \quad (6.29)$$

Entonces $\mathcal{L} : H^0 \rightarrow H^0$ con el dominio H^{2s} es el operador con una resolvente compacta y de, su espectro consiste enteramente de eigenvalores aislados con multiplicidad finita. El único punto de acumulación si existe, tiende a infinito.

DEMOSTRACIÓN 6.1 El problema espectral (6.9) puede ser escrito como

$$\nu \Lambda^{2s} G + \sigma G + J(\Psi, G) - J(\Omega, \Delta^{-1} G) = -\omega G. \quad (6.30)$$

Es la formulación generalizada para encontrar una solución no cero $\zeta \in H^s$ tal que

$$\nu \langle \Lambda^s \zeta, \Lambda^s h \rangle + M(\zeta, h) = -(\omega + \sigma) \langle \zeta, h \rangle \quad (6.31)$$

se cumple para cualquier función $h \in H^s$ donde

$$M(\zeta, h) = \langle J(\Psi, \zeta), h \rangle - \langle J(\Omega, \Delta^{-1} \zeta), h \rangle. \quad (6.32)$$

Una solución suficientemente suave de (6.31) es también una solución del problema (6.30).

Por la desigualdad de Schwarz,

$$\langle \Lambda^s \zeta, \Lambda^s h \rangle \leq \|\Lambda^s \zeta\| \|\Lambda^s h\| = \|\zeta\|_s \|h\|_s. \quad (6.33)$$

Así, para un $\zeta \in H^s$ fijo, la forma sesquilineal $\langle \Lambda^s \zeta, \Lambda^s h \rangle$ es una funcional lineal limitada de $h \in H^s$, y por el teorema de Riesz [28],

$$\langle \Lambda^s \zeta, \Lambda^s h \rangle = \langle \mathcal{T} \zeta, h \rangle_s, \quad (6.34)$$

donde $\mathcal{T} : H^s \rightarrow H^s$ es el operador no negativo autoadjunto y limitado.

Tomando en cuenta (6.29), los lemas 4.2 4.2 y a la demostración 4.2, y el hecho de que $s \geq 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} |M(\zeta, h)| &\leq (C_1 \|\nabla \zeta\| \|h\| + C_2 \|\nabla \Delta^{-1} \zeta\|) \|h\| \\ &= (C_1 \|\Lambda \zeta\| + C_2 \|\Lambda^{-1} \zeta\|) \|h\| \end{aligned}$$

$$= (C_1 \|\zeta\| + C_2 \|\zeta\|_{-1}) \leq C \|\zeta\|_s \|h\| \leq K \|\zeta\|_s \|h\|_s. \quad (6.35)$$

Así para un $\zeta \in H^s$ fijo, la forma sesquilineal (6.32) es una funcional lineal limitada de h en H^s y por teorema de Riesz,

$$M(\zeta, h) = \langle \mathcal{F}\zeta, h \rangle_s, \quad (6.36)$$

donde el operador $\mathcal{F} : H^s \rightarrow H^s$ está limitado.

Ahora mostramos que el operador $\mathcal{F} : H^s \rightarrow H^s$ es compacto. Sea $\{u_n\}$ una secuencia de elementos H^s que converge débilmente a un elemento u . De $\mathcal{F} : H^s \rightarrow H^s$ es el operador limitado, $\{\mathcal{F}u_n\}$ también converge débilmente a un elemento $\mathcal{F}u$ en H^s . Debido al Corolario 4.2, ambas secuencias convergen en H^0 : $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ y $\|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u\| \rightarrow 0$ como $n \rightarrow \infty$. Usando (6.35) y (6.36) obtenemos

$$\|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u_m\|_s^2 \leq C \|u_n - u_m\|_s \|\mathcal{F}u_n - \mathcal{F}u_m\|.$$

Así $\{\mathcal{F}u_n\}$ es la secuencia Cauchy en H^s ; esto es, $\mathcal{F} : H^s \rightarrow H^s$ es compacta. Finalmente, de

$$\langle \zeta, h \rangle \leq \|\zeta\| \|h\| \leq 2^{-s/2} \|\zeta\| \|h\|_s,$$

la forma sesquilineal $\langle \zeta, h \rangle$ es continua con respecto a $h \in H^s$ para cada $\zeta \in H^0$ fijo, y por el teorema de Riesz,

$$\langle \zeta, h \rangle = \langle \mathcal{R}\zeta, h \rangle_s, \quad (6.37)$$

donde el operador $\mathcal{R} : H^0 \rightarrow H^s$ es limitado. Además, su restricción $\mathcal{R} : H^s \rightarrow H^s$ es autoadjunto no negativo (debido a (6.37)) y compacto como el producto $\mathcal{R}\Lambda^{-s}$ del operador compacto $\Lambda^{-s} : H^s \rightarrow H^0$ (ver Teorema 4.2) y el operador limitado $\mathcal{R} : H^0 \rightarrow H^s$ ([28], Teorema 4.8).

Debido a (6.34), (6.36) y (6.37), la identidad (6.31) es equivalente a

$$v \langle \mathcal{T}\zeta, h \rangle_s + \langle \mathcal{F}\zeta, h \rangle_s = -(\omega + \sigma) \langle \mathcal{R}\zeta, h \rangle_s \quad (6.38)$$

o a la ecuación operador

$$(v\mathcal{T} + \mathcal{F})\zeta = -(\omega + \sigma)\mathcal{R}\zeta. \quad (6.39)$$

Mostramos que el inverso al operador $\mathcal{B} = v\mathcal{T} + \mathcal{F} + \omega_0\mathcal{R} : H^s \rightarrow H^s$ es limitado si el numero positivo ω_0 es suficientemente grande. De hecho, sea $\mathcal{B}v = w$. Tomando en cuenta que $\langle \mathcal{T}v, v \rangle_s$ y $\langle \mathcal{R}v, v \rangle_s$ ambos son no negativos y usando (6.39), (6.34), (6.35), (6.37) y desigualdad- ε , obtenemos

$$\begin{aligned} \|w\|_s \|v\|_s &\geq |\langle w, v \rangle_s| = |\langle \mathcal{B}v, v \rangle_s| \geq v \langle \mathcal{T}v, v \rangle_s + \omega_0 \langle \mathcal{R}v, v \rangle_s - |\langle \mathcal{F}v, v \rangle_s| \\ &\geq v \|\Lambda^s v\|^2 + \omega_0 \|v\|^2 - K \|v\|_s^2 \\ &\geq (v - K\varepsilon^2) \|v\|_s^2 + \left(\omega_0 - \frac{K}{4\varepsilon^2} \right) \|v\|^2. \end{aligned}$$

Poniendo $\varepsilon^2 < v/K$ y entonces escogemos ω_0 tal que $\omega_0 > K/(4\varepsilon^2)$, obtenemos el estimado requerido:

$$\|v\|_s \leq C \|w\|_s = C \|\mathcal{B}v\|_s.$$

Así,

$$\mathcal{B}\zeta = (\omega_0 - \omega - \sigma) \mathcal{R}\zeta \tag{6.40}$$

o

$$\mathcal{A}\zeta = (\omega_0 - \omega - \sigma)^{-1} \zeta, \tag{6.41}$$

donde el operador $\mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{R} : H^s \rightarrow H^s$ es compacto siendo el producto del operador limitado \mathcal{B}^{-1} y operador compacto \mathcal{R} . Note que si $s > 1$, entonces ambos $\mathcal{R} : H^s \rightarrow H^s$ y $\mathcal{A} : H^s \rightarrow H^s$ son los operadores Hilbert-Schmidt.

Concluimos que ω es un eigenvalor del problema (6.31) si y solo si $(\omega_0 - \omega - \sigma)^{-1}$ es un eigenvalor del operador compacto \mathcal{A} . Por tanto, existe a lo sumo un conjunto contable de eigenvalores aislados del problema (6.31), y de, del problema (6.30), etso es, el operador \mathcal{L} . Cada eigenvalor limitado es de multiplicidad finita. El único punto de acumulación de los eigenvalores podría tender a infinito. El teorema es demostrado.

Para el caso de un dominio limitado sobre el plano y $s = 1$, este resultado demostrado en [35]. La integridad del sistema de eigenfunciones y eigenfunciones generalizadas del operador $\mathcal{A} : H^s \rightarrow H^s$ sigue del teorema Naimark [45].

TEOREMA 6.2 *Variedades inestables en una vecindad de un flujo estacionario $\Psi(x)$ es de dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN 6.2 Sea $\mathcal{W} = -\mathcal{L}$. Entonces (6.30) y (6.35) siguen a

$$|\langle \mathcal{W}\zeta, h \rangle| \leq C_0 \|\zeta\|_s \|h\|_s, \quad (6.42)$$

donde $C_0 = v + \sigma 2^{-s} + K$. Tomando en cuenta (6.32), ecuación $\text{Re}\langle J(\Psi, h), h \rangle = 0$ y estimamos (6.35) y (4.24) obtenemos

$$\text{Re}\langle J(\Omega, \Delta^{-1}h), h \rangle \leq C_2 \|h\|_{-1} \|h\| \leq C_0 \|h\|^2$$

o

$$\begin{aligned} \text{Re}\langle \mathcal{W}h, h \rangle &= v \|h\|_s^2 + \sigma \|h\|^2 - \text{Re}\langle J(\Omega, \Delta^{-1}h), h \rangle \\ &\geq v \|h\|_s^2 - C_0 \|h\|^2. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Así, el operador $\mathcal{W} = -\mathcal{L}$ satisface todas las condiciones de la afirmación de Sattinger ([51], Lema 3.1), y todos los eigenvalores del operador \mathcal{L} (o problema espectral ((6.9)) tienden dentro del dominio parabólico

$$\text{Re}\omega < -K_1 (\text{Im}\omega)^2 + K_2, \quad (6.44)$$

donde K_1 y K_2 son algunas constantes positivas fijas. Seguimos de (6.44) y el Teorema 7.2 que el operador $\mathcal{L} : H^0 \rightarrow H^0$ puede tener solo un número finito de los eigenvalores con parte real positiva, esto es, múltiplos inestable en una vecindad del flujo estacionario $\Psi(x)$ es de dimensión finita. El teorema es demostrado.

6.3. Operador Espectral para un Fluido Ideal

Hemos mostrado que para un fluido viscoso ($v > 0$), el espectro del operador \mathcal{L} es discreto, además los eigenvalores pueden agruparse únicamente al infinito. Considere ahora la estabilidad de modo normal de un flujo de un fluido ideal sobre una esfera rotando ($v = 0$, $\sigma = 0$, $f = 0$). La dinámica de fluidos es entonces gobernada por [51],

$$\Delta\psi_t + J(\psi, \Delta\psi + 2\mu) = 0, \quad (6.45)$$

y al contrario de un caso viscoso, el operador \mathcal{L} tiene un espectro continuo no vacío también [71]. De hecho, para un flujo zonal $\Psi(\mu)$, este operador acepta la forma

$$\mathcal{L}\zeta \equiv (\Psi_\mu - \Omega_\mu \Delta^{-1}) \zeta_\lambda, \quad (6.46)$$

y la solución de (6.6) puede ser encontrada en la forma de un modo normal

$$\zeta(t, \lambda, \mu) = G(\mu) \exp(im(\lambda - \omega t)) \quad (6.47)$$

o como streamfunctions

$$\phi(t, \lambda, \mu) = B(\mu) \exp(im(\lambda - \omega t)) = A(\lambda, \mu) \exp(-im\omega t).$$

La sustitución de (6.47) en (6.6) sigue al problema espectral

$$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \zeta = \omega \zeta,$$

$$\mathcal{L}_1 \zeta = -\Psi_\mu \zeta, \quad \mathcal{L}_2 \zeta = \Omega_\mu \Delta^{-1} \zeta. \quad (6.48)$$

Note que $\mathcal{L} = im(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ y

$$\mathcal{L}\zeta = \varrho \zeta, \quad \varrho = im\omega.$$

Note también que junto con una solución ω, ζ , el problema (6.48) tiene una solución compleja conjugada $\bar{\omega}, \bar{\zeta}$. El operador \mathcal{L}_1 tiene un espectro puramente continuo.

$$\sum(\mathcal{L}_1) = \left[\min_{-1 \leq \mu \leq 1} \{-\Psi_\mu\}, \quad \max_{-1 \leq \mu \leq 1} \{-\Psi_\mu\} \right]. \quad (6.49)$$

Por definición, el espectro esencial de un operador contiene todos sus eigenvalores excepto para los eigenvalores aislados con multiplicidad finita. Por tanto, el espectro esencial $\sum_e(\mathcal{L}_1)$ de operador \mathcal{L}_1 coincide con $\sum(\mathcal{L}_1)$. Por otro lado, el operador \mathcal{L}_2 es compacto como el producto del operador limitado $\mathcal{L}_3 u = \Omega_\mu u$ y el operador compacto Δ^{-1} . Del espectro esencial de un operador es conservado bajo una perturbación compacta ([28], Captulo IV, Teorema 5.35), obtenemos que el espectro esencial $\sum_e(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)$ de operador $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ coincide con $\sum(\mathcal{L}_1)$ y contiene solo eigenvalores reales. Así la siguiente afirmación es válida:

TEOREMA 6.3 ([71]) Sea $\Psi(\mu)$ un flujo zonal, además $|\Psi_\mu(\mu)| \leq C_1$ y $|\Omega_\mu(\mu)| \leq C_2$. Entonces para cualquier eigenvalor del espectro esencial del operador (6.46), el modo normal (6.47) correspondiente es neutral. Un modo inestable, si existe, corresponde a un eigenvalor aislado ω con multiplicidad finita.

EJEMPLO 6.1 Consideremos un flujo superrotacional

$$\Psi(\mu) = -C\mu \quad (6.50)$$

sobre la esfera (C es la velocidad de rotación). El espectro esencial del operador $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ consiste de un punto único $\omega = C$. De acuerdo a la condición de inestabilidad lineal Rayleigh-Kuo [31], [48] los modos normales inestables pueden existir solo si la derivada de vorticidad absoluta $(d/d\mu)\Omega \equiv 2 + (d/d\mu)\Delta\Psi$ cambia su signo en el intervalo $(-1, 1)$. En nuestro caso, $(d/d\mu)\Omega = 2(C + 1)$, y de, flujo (6.50) es linealmente estable, además todos los modos (6.47) son neutrales.

Los eigenvalores aislados y modos correspondientes (6.47) pueden ser fácilmente obtenidos usando la onda Rossby-Haurwitz [59].

$$\psi(\lambda, \mu, t) = -C\mu + \sum_{m=-n}^n a_m Y_n^m(\lambda - \omega_n t, \mu). \quad (6.51)$$

De hecho, la onda (6.51) es la solución exacta a la ecuación de vorticidad (??) para valores arbitrarios C y a_m con tal que

$$\omega_n = C - \frac{2(C + 1)}{n(n + 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.52)$$

Podemos considerar cada termino $a_m Y_n^m(\lambda - \omega_n t, \mu)$ en (6.51) como una perturbación de flujo (6.50), además esta perturbación es también solución exacta de la ecuación linealizada (6.6) y el problema espectral (6.48) con ω igual a (6.52). Por tanto, para cada n , el numero (6.52) es el eigenvalor con multiplicidad de modos normales $2n + 1$, y $2n + 1$ linealmente independiente (armónicos esféricos)

$$\zeta(t, \lambda, \mu) = Y_n^m(\lambda - \omega_n t, \mu), \quad -n \leq m \leq n. \quad (6.53)$$

forman la base del eigensubespacio correspondiente que coincide con el subespacio H_n de los polinomios esféricos homogéneos de grado n (ver (4.9)). En una vecindad del flujo (6.50), la unión de tales modos normales para todo numero n forman las bases

para perturbaciones infinitesimales del espacio de Hilbert H^0 . Así, el espectro discreto de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ consiste de los eigenvalores aislados reales (6.52) perteneciendo al intervalo $[-1, C)$ para $C > -1$ y el intervalo $(C, -1]$ para $C < -1$. El punto único $\omega = C$ del espectro esencial es el único punto de acumulación de los eigenvalores aislados.

El Ejemplo 6.1 muestra que, al contrario de un fluido viscoso (Teorema 6.1), el operador espectral para un fluido ideal puede tener puntos de acumulación limitados.

EJEMPLO 6.2 Considere ahora el flujo zonal

$$\Psi(\mu) = -C\mu + aP_n(\mu), \tag{6.54}$$

donde a es la amplitud del flujo, y $P_n(\mu)$ es el polinomio de Legendre de grado n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Este flujo es linealmente estable si $n = 1$ (Ejemplo 6.1) y $n = 2$ [64]. Sea $n \geq 3$. De acuerdo a la condición de inestabilidad de Rayleigh-Kuo [31], [48] modos normales inestables (6.47) puede existir solo si la derivada de la vorticidad absoluta $(d/d\mu)\Omega = 2(C + 1) - an(n + 1)(d/d\mu)P_n$ del flujo (6.54) cambia su signo al menos en un punto del intervalo $(-1, 1)$. Así, la inestabilidad puede ser desarrollada solo si $|a| > a_{cr}$; esto es, cuando la amplitud del flujo a excede un valor crítico

$$a_{cr} = 2|C + 1| \left\{ N(n + 1) \max_{\mu} \left| \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) \right| \right\}^{-1}. \tag{6.55}$$

La amplitud crítica a_{cr} incrementa con $|C + 1|$, desciende cuando el grado n del flujo básico crece, y es ausente cuando $C = -1$. Para la otra condición de inestabilidad innecesaria [71], amplitud $A(\lambda, \mu)$ de cada modo inestable debe satisfacer

$$\chi_A = n(n + 1), \tag{6.56}$$

donde $\sqrt{\chi_A} = \sqrt{\eta(A)/K(A)}$ es el número espectral promedio de Fjørtoft de $A(\lambda, \mu)$ [15], y $K(A) = (1/2)\|\nabla A\|^2$ son la energía cinética y entropía de $A(\lambda, \mu)$, respectivamente. Debido a (6.56), el número de onda zonal m de cualquier modo inestable (6.47) debe satisfacer la desigualdad $0 < |m| \leq n$ [59].

Sustituyendo (6.54) en (6.48) y usando otra vez la onda (6.51) obtenemos el punto

$$\omega_n = C - \frac{2(C + 1)}{n(n + 1)}$$

es el eigenvalor del operador $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ con multiplicidad $2n + 1$, que puede ser aislado o pertenece a su espectro esencial dependiendo de los valores C, a y n . Los modos

correspondientes $2n + 1$ (6.53) son neutrales y forman bases ortogonales en el eigenspacio H_n (ver (4.9)); esto es, cualquier disturbio de H_n es estable a pesar del hecho de que (6.56) se satisface. Por tanto, además de (6.56), la amplitud de cada modo inestable debe tener proyecciones no zero sobre subespacios H_k con $k > n$ y $k < n$ a la vez [63].

En ambos ejemplos, el espectro esencial del operador $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ es real, coincide con el espectro $\sum(\mathcal{L}_1)$ y es limitado debido a (6.49). Ahora mostramos que todos los eigenvalores correspondientes a los modos inestables del flujo (6.54) son también limitados. De hecho, en términos de la perturbación de la streamfunction, (6.48) acepta la forma

$$-\Psi_\mu \Delta \phi + \Omega_\mu \phi = \omega \Delta \phi. \quad (6.57)$$

Tomando el producto interno (6.10) de cada término de (6.57) con ϕ y usando (4.24) y condiciones de inestabilidad (6.56), obtenemos

$$|\omega| \leq \max_{-1 \leq \mu \leq 1} |\Psi_\mu| + \frac{n(n+1)}{4} \max_{-1 \leq \mu \leq 1} |\Omega_\mu|, \quad (6.58)$$

donde $(d/d\mu)\Psi = a(d/d\mu)P_n - C$ y $(d/d\mu)\Omega$ esta dada en el ejemplo 2. Así, la proporción de crecimiento de modos inestables para el flujo (6.54) caracterizado por $\text{Im}\omega$ es limitado. Para $C = 0$ este resultado se muestra en [63]. Si seguimos de (6.58) que un múltiplo inestable en una vecindad del flujo (6.54) es de dimensión finita siempre que eigenvalores con $\text{Im}\omega > 0$ no tengan puntos de acumulación.

6.4. Matriz de Estabilidad

Ahora discutimos brevemente el papel del arrastre lineal, difusión turbulenta y rotación de la esfera en el estudio de la estabilidad de modo normal. Sea M y N numeros de truncación triangulares para el flujo básico y disturbancia, respectivamente. La matriz de estabilidad representada en el operador (6.7) en el subespacio de polinomios esféricos de grado $\leq N$ puede ser escrito como [59], [64]

$$L_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta}^M B_{\beta\alpha\gamma} + D_{\alpha\gamma}, \quad (6.59)$$

donde

$$B_{\beta\alpha\gamma} = (\chi_\beta\chi_\gamma^{-1} - 1) \Psi_\beta \langle J(Y_\beta, Y_\gamma), Y_\alpha \rangle$$

es el coeficiente de la interacción no lineal de los tres armónicos esféricos Y_α, Y_β y Y_γ , Ψ_β es el coeficiente de Fourier de la estreamfunction de flujo básico $\Psi(x)$, y

$$D_{\alpha\gamma} = \left\{ -(\sigma + vX_\gamma^s) + 2im_\gamma X_\gamma^{-1} \right\} \delta_{\alpha\gamma} \quad (6.60)$$

es la matriz diagonalizada. Hemos usado aquí las notaciones Platzman [47]: un índice complejo $\alpha = (m_\alpha, n_\alpha)$, $\chi_\alpha = n_\alpha(n_\alpha + 1)$ y

$$\sum_{\beta}^M \equiv \sum_{n_\beta=1}^M \sum_{m_\beta=-n_\beta}^{n_\beta} .$$

Las partes reales $-(\sigma + v\chi_\gamma^s)$ de las entradas diagonales de (6.60) representan el arrastre lineal y difusión turbulenta. Si se sigue de (6.60) que el arrastre lineal resulta solo cambiando todos los eigenvalores de la matriz (6.59) a lo largo del eje real a la izquierda a través del valor σ . Así, la estabilidad de todos los modos normales uniformemente incrementa con σ . Para un fluido viscoso ($v > 0$), los términos diagonales $v\chi_\gamma^s = v[n_\gamma(n_\gamma + 1)]^s$ sube con v y s y n_γ incrementando la distancia entre eigenvalores debido al teorema de Gerschgorin [36]. Este hecho es favorable para resolver el problema espectral (6.9) con alta exactitud.

Los Ejemplos 6.1 y 6.2 muestran que la esfera en rotación en general estabiliza un flujo barótrópico. Por ejemplo, la amplitud crítica a_{cr} para la inestabilidad del flujo zonal debe su origen a la rotación de la esfera. De hecho, de acuerdo a la condición Rayleigh-Kuo [31], [48] un flujo zonal es exponencialmente estable si su amplitud es suficientemente pequeña (o, esto es lo mismo, si la esfera en rotación es suficientemente fuerte). En la matriz de estabilidad (6.59), la rotación es representada por las partes imaginarias $2im_\gamma\chi_\gamma^{-1}$ de las entradas diagonales de (6.60) que son pequeñas para un $|m_\gamma|$ pequeño. Tomando en cuenta que los armónicos esféricos $Y_\gamma(x)$ con un numero fijo m_γ forman un subespacio invariante de perturbaciones infinitésimales (ver (6.47)), ahora podemos explicar el bien conocido resultado numérico, de acuerdo al cual el numero de onda zonal m de los modos más inestables (6.47) de un flujo zonal es comúnmente pequeño ($1 \leq |m| \leq 3$) [71].

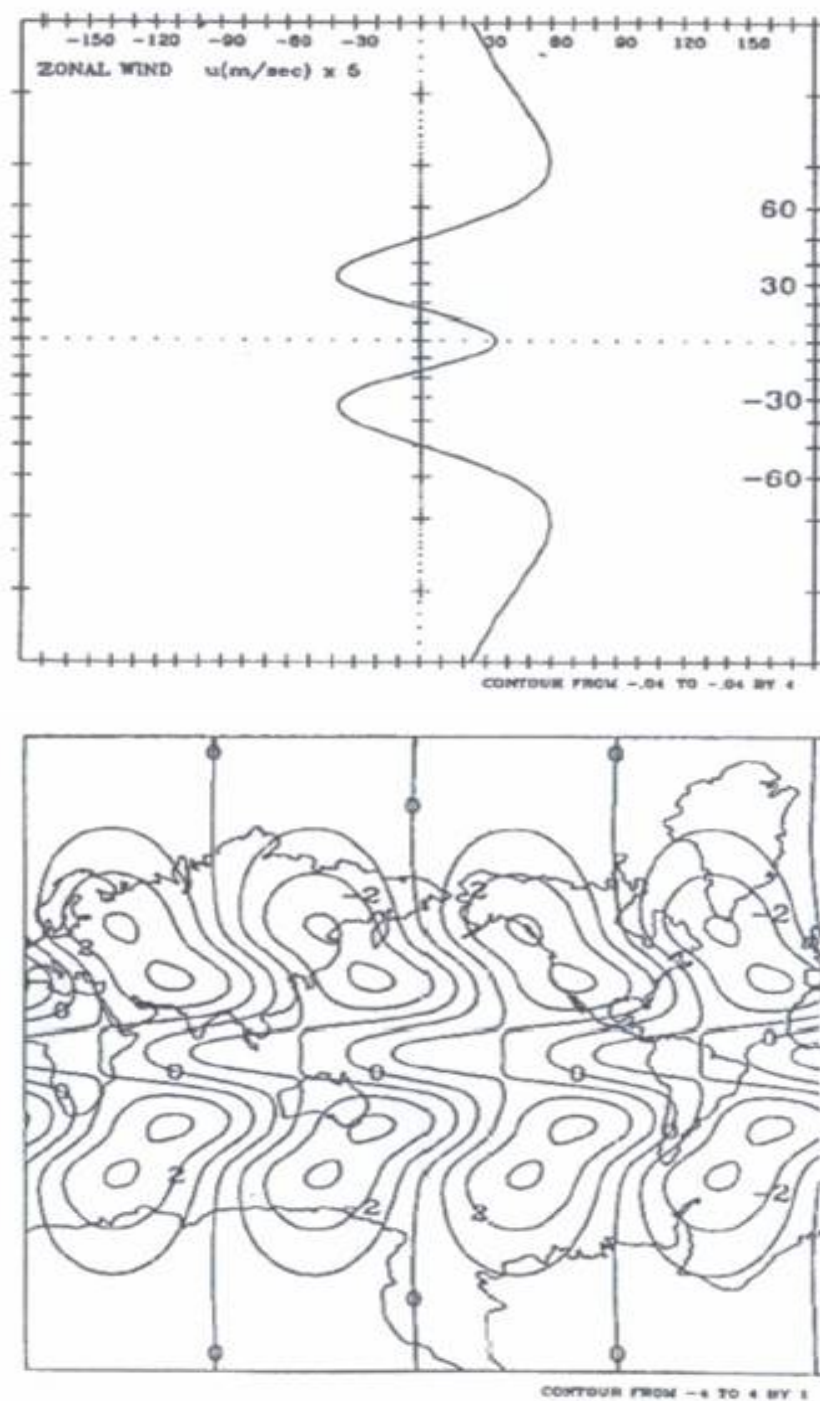


Figura 6.1: Viento Zonal (figura superior) que corresponde al flujo $\psi(\mu) = P_5(\mu)$ y el modo normal más inestable (figura inferior) $u \sim P_4(\mu)$

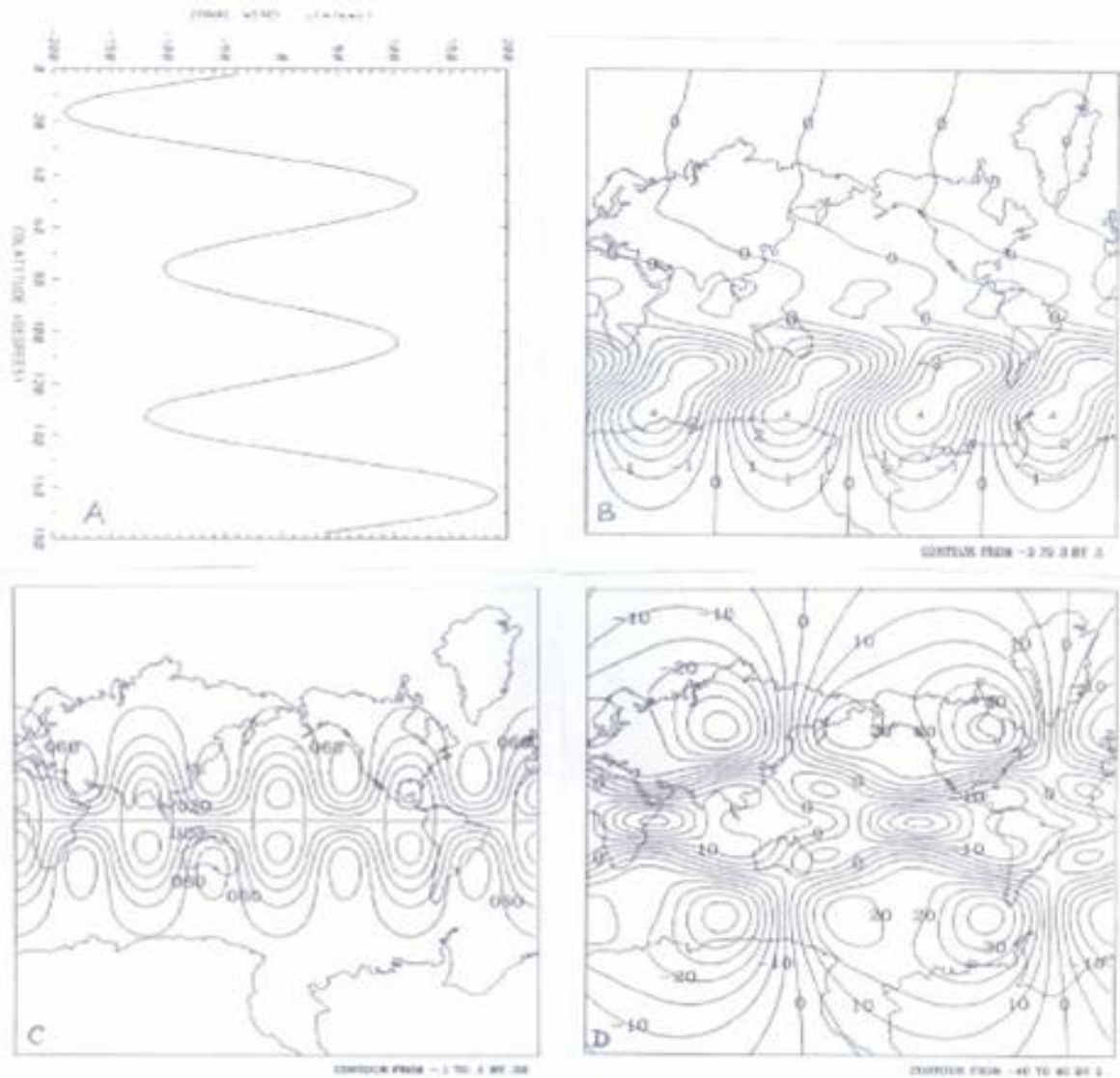


Figura 6.2: Perfil del flujo zonal asociado con un polinomio de Legendre de grado $n = 6$ (A) La parte real de la amplitud del modo más inestable $m = 2$ (B) Streamfunction de la onda de Rossby-Haurwitz con $m = 4$ y $n = 5$ (C) La parte real de la amplitud del modo más inestable $m = 1$ (D)

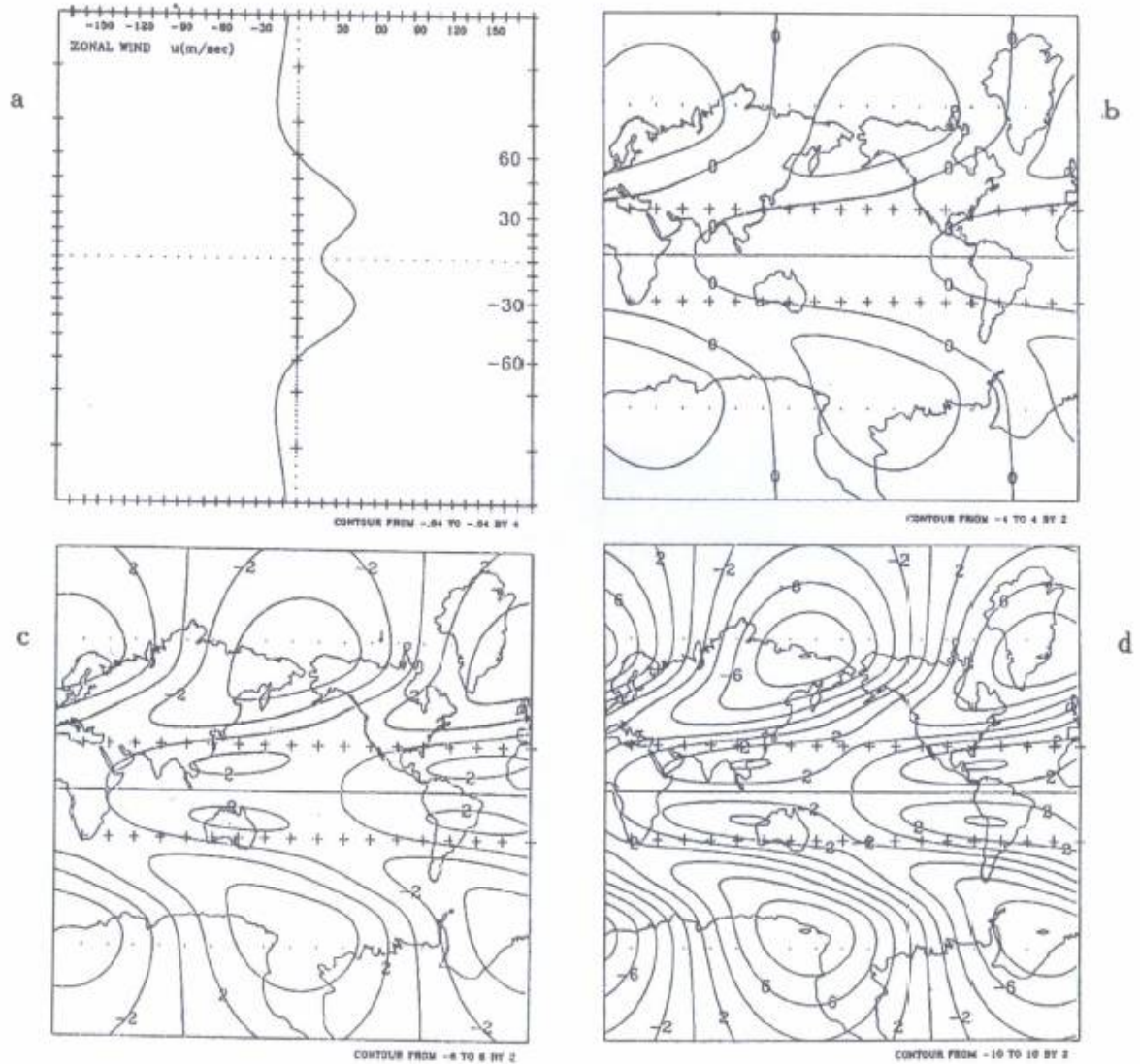


Figura 6.3: El perfil de velocidad $\tilde{u}(\mu)$ de la onda zonal Rossby-Haurwitz (14) con $n = 5$ y $a = 0,0052$ (Fig. 6.3a), e isolíneas de $\Psi_r(\lambda, \mu, t)$ para los modos más inestables ($\omega = 0,0268$) al momento $t = 0$ (Fig. 6.3b), $t = T/8$ (Fig. 6.3b) y $t = T/4$ (Fig. 6.3d).

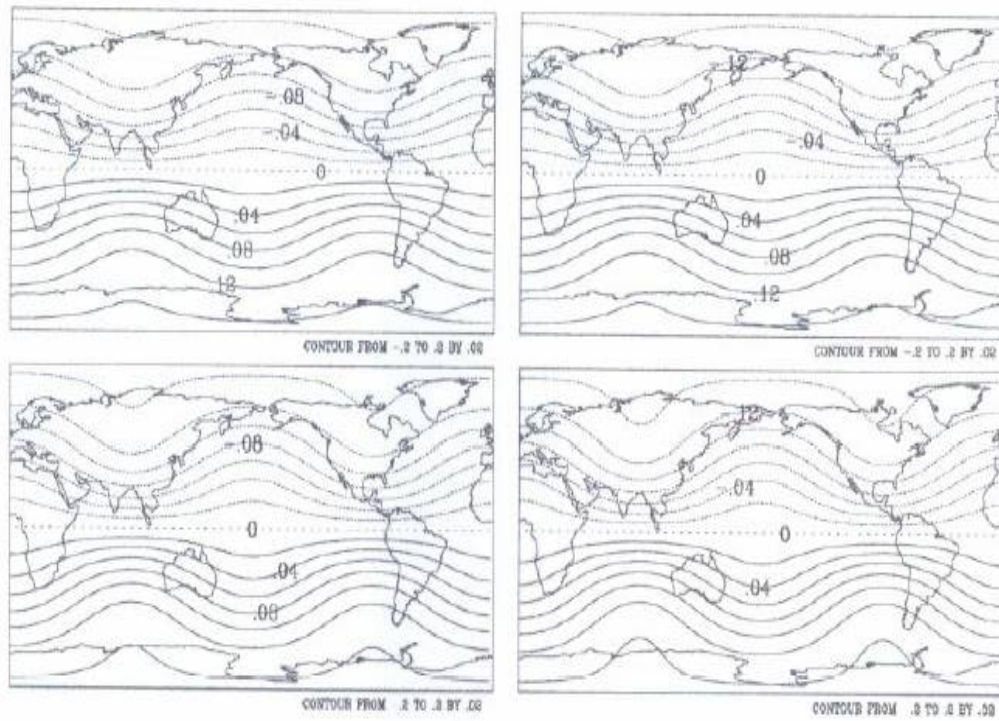


Figura 6.4: Onda Rossby-Haurwitz básica $\tilde{\Psi}(\lambda, \mu) = -\omega\mu + aP_3^2(\mu) \cos 2\lambda$, en las amplitudes $a = 0,011, 0,012, 0,014, 0,016$, respectivamente.

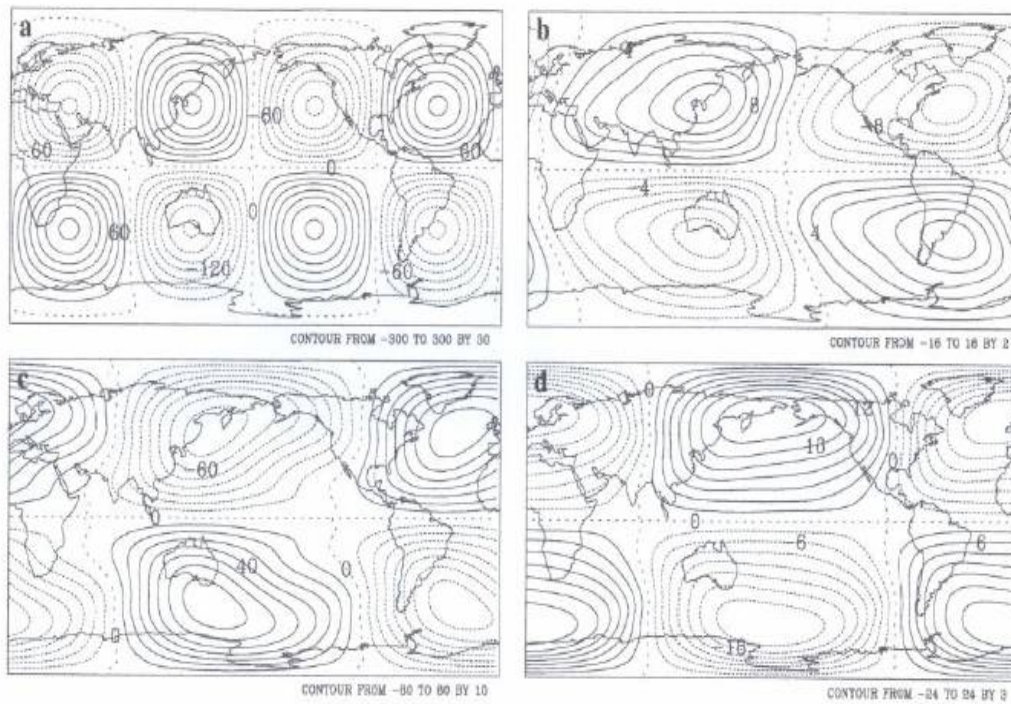


Figura 6.5: Modos más inestables para la onda de Rossby-Haurwitz $\tilde{\Psi} = -\omega\mu = aP_3^2 \cos 2\lambda$; a) Aquí no hay modos inestables, es modo neutral que corresponde al armónico esférico $Y_3^2(\lambda, \mu)$

Apéndice

Apéndice A

Lista de Símbolos

R Números reales

R^N Espacio euclídeo N -dimensional

R^3 Espacio euclídeo 3-dimensional

R^2 Espacio euclídeo 2-dimensional

R_+^2 Semiplano con segunda coordenada positiva

R_+^{N+1} Semiespacio con la última coordenada positiva

Q Números racionales

C Números complejos

N Números naturales

Z Números enteros

$A \times B$ Producto cartesiano de A y B .

C^∞ Funciones indefinidamente diferenciables

C_0^∞ Funciones indefinidamente diferenciables y con soporte compacto.

C Funciones continuas

C^1 Funciones con primeras derivadas continuas

C^2 Funciones con segundas derivadas continuas

C^3 Funciones con terceras derivadas continuas

C^k Funciones con k derivadas continuas

C^α Funciones Holderianas

L^2 Funciones de cuadrado integrable

\Re Parte real

\langle, \rangle Producto escalar canónico en R^N .

Apéndice B

Análisis Vectorial

Identidades Vectoriales

En las siguientes fórmulas, ϕ es cualquier escalar y \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} son cualquier vector.

$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \nabla \phi \times \mathbf{a} + \phi (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) = 0$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

Bibliografía

- [1] Abramowitz M. and I.A. Stegun. Handbook of mathematical functions. Dover, 1965.
- [2] Agranovich M.S. Elliptic singular integro-differential operators. Usp. Mat. Nauk, 1965, 20 (5), 1-122.
- [3] Andrews D.G. On the stability of forced non-zonal flows. Quart. J. Roy. Met. Soc., 1984, 110, 657-662.
- [4] Arnold V.I. On conditions for non-linear stability of plane stationary curvilinear flows of an ideal fluid. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1965, 162 1965 975-978 (Sov. Math. Dokl., No. 6, 331-334).
- [5] Berens H., P.L. Butzer and S. Pawelke (1968). Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler kugelfunctionen und deren saturationsverhalten. Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser.A, 4 (2), 201-268.
- [6] Bers L. F.F. John and M. Schechter. Partial differential equations. Wiley, New York, 1964.
- [7] Bramble J.H. and Osborn, J.E. Rate of Convergence Estimates for Nonselfadjoint Eigenvalue Approximations. Math. Comp., 1973, 27 (123), 525-549.
- [8] Butzer P.L. and H. Johnen. Lipschitz Spaces on Compact Manifolds. J. Funct. Anal., 1971, 7 (2), 242-266.
- [9] Coaker S.A. The Stability of a Rossby Wave. Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn., 1977, Vol. 9, 1-17.

-
- [10] Curie, I.G.: *Fundamental Mechanics of Fluids (2nd edition)*. Mc Graw Hill, Estados Unidos, 1993.
- [11] Dikii L.A. Hydrodynamic stability and the dynamics of atmosphere. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1976 (Russian).
- [12] Dymnikov V.P. and Yu.N. Skiba. Spectral criteria for stability of atmospheric barotropic flows. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Atmosph. Oceanic Physics*, 1987, 23 (12), 263-274.
- [13] Dymnikov V.P. and Yu.N. Skiba. Barotropic instability of zonally asymmetric atmospheric flows over topography. *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, 1987, 2 (2), 83-98.
- [14] Dzapharov A.S. Spherical modulus of continuity and best approximation of functions on the sphere by means of spherical sums. (Russian) *Izv. Akad. Nauk Azerbaidzan. SSR, Ser. Fiz.-Tehn. Mat. Nauki*, 1968, no. 5, 3-9.
- [15] Fjörtoft R. On the Changes in the Spectral Distribution of Kinetic Energy for Two-Dimensional Nondivergent Flow. *Tellus*, 1953, 5 (3), 225-230.
- [16] Gadzhiev A. D. Differential properties of the symbol of a multidimensional singular integral operator. (Russian) *Mat. Sbornik*, 1981, 114 (156), no. 4, 483-510.
- [17] García I. P., Skiba, Yu. N. Teste of a numerical algorithm for the linear instability study of flows on a sphere, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 14 (1998) 143-157.
- [18] Gill A.E. The Stability of Planetary Waves on an Infinite Beta Plane. *Geof. Fluid Dyn.*, 1974, Vol.6, 29-47.
- [19] Goldstein E.G. Some estimates of the derivatives of harmonic polynomials. (Russian). In: *Investigations on actual problems in the theory of functions of complex variables*. Fizmatgiz, Moscow, 1961, 171-180.
- [20] Haurwitz B. The motion of atmospheric disturbances on the spherical Earth. *Journal Marine Research*, 3. 254-267.

-
- [21] Helgason S. Groups and geometric analysis. Integral Geometry, Invariant Differential Operators and Spherical Functions. Academic Press, Orlando, 1984.
- [22] Hoskins B. J., Karol D. J. The steady linear response of a spherical atmosphere to thermal and orographic forcing. *Journal Atmospheric Sci.*, 1981, 38. 1179-1196.
- [23] Hoskins B.J. Stability of the Rossby-Haurwitz Wave. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1973, Vol. 99, 723-745.
- [24] Hoskins B.J. and A. Hollingsworth. On the Simplest Example of the Barotropic Instability of Rossby Wave Motion. *J. Atmos. Sci.*, 1973, Vol.30, p. 150.
- [25] Ivanov V.A. On the Bernstein-Nikolskiy and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1. *Usp. Mat. Nauk*, 1983, 38, 179-180.
- [26] Ivanov V. A. and Skiba, Yu. N. Some embedding theorems on compact homogeneous spaces and their application to the study of the stability of a barotropic fluid on a sphere. *Akad. Nauk SSSR, Depart. Numer. Mathematics, Moscow*, 1990, 242, 39 pp. (Russian).
- [27] Kamzolov A.I. On approximation of smooth functions on the sphere S^n by Fourier method. *Math. Zametki*, 1982, 31 (6), 847-853 (Russian).
- [28] Kato T. Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [29] Kolmogorov A.N. and S.V. Fomin. Elements of the function theory and functional analysis. Nauka, Moscow, 1976 (Russian).
- [30] Korneichuk N.P. Exact constants in approximation theory. Nauka, Moscow, 1987 (Russian).
- [31] Kuo H.-L. Dynamic Instability of Two-Dimensional Nondivergent Flow in a Barotropic Atmosphere. *J. Meteor.*, 1949, Vol. 6, 105-122.
- [32] Kuo H.-L. Finite Amplitude Three-Dimensional Harmonic Waves on a Spherical Earth. *J. Meteor.*, 1959, Vol.16, 524-535.

-
- [33] Kushnirenko G. G. Problems of approximation of continuous functions on unit sphere by finite spherical sums. Trans. Kharkov Polytechnical Institute, Ing.-Fis. 1959, Vol (25), 3, 3-22
- [34] Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. Mathematics and its Applications, Vol. 2, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [35] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Nauka, Moscow, 1973 (Russian).
- [36] Lancaster, P. The theory of Matrices. Academic Press, New York, 1985.
- [37] Larichev, V.D. and G.M. Reznik. Two-Dimensional Rossby Soliton: An Exact Solution. POLYMODE News, 1976, # 19, 3 and 6.
- [38] Levina, C.A. Stability of Geostrophic Vortices on a Rotating Sphere. Courant Inst. Math. Sci., 1974, IMM-405, New York University, 212 pp.
- [39] Lions J.-L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. (French) Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969 (French); Certain methods for the solution of nonlinear boundary value problems. Mir, Moscow, 1972 (Russian).
- [40] Lizorkin P.I. and S.M. Nikolskiy. Approximation of functions on a sphere in L_2 . Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1983, 271 (5), 1059-1063.
- [41] Lizorkin P. I. and S. M. Nikolskiy. Approximation on a sphere in the metrics of continuous functions. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1983, 272, (3), 524-528.
- [42] Lorenz, E.N. Barotropic Instability of Rossby Wave Motion. J. Atmos. Sci., 1972, Vol.29, 258-264.
- [43] Machenhauer B. (1977). Spectral Methods. In: Numerical methods used in atmospheric models. II, Chapter 3, GARP Publication Series, 17, WMO, 124-275.
- [44] Merilees, Ph.E. The equations of motion in spectral form. J. Atmos. Sci. 28 (1968), 736-743.

-
- [45] Naimark M. A. On some criteria of completeness of the system of eigen and adjoint vectors of a linear operator in Hilbert space. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1954, 98, 727-730.
- [46] Neven, E.C. Linear stability of modons on a sphere. J. Atmospheric Sci. 58 (1981) 108-321.
- [47] Platzman, G.W. The Analytical Dynamics of the Spectral Vorticity Equation. J. Atm. Sci., 1962, Vol. 19, 313-328.
- [48] Rayleigh L. On the stability and instability of certain fluid motions. Scientific Papers, Vol.3. Cambridge University Press, Cambridge, 1880, 594-596.
- [49] Richtmyer R.D. (1982). Principles of advanced mathematical physics. Springer-Verlag, New York, 1978 (Vol. 1); 1981 (Vol. 2).
- [50] Rossby C. G. Relation between variations in the intensity of zonal circulation of the atmosphere and the displacement centers of action. Journal Marine Research, (2). 1939. 38.
- [51] Sattinger D. H. The Mathematical Problem of Hydrodynamic Stability. J. Math. Mech., 1970, Vol. 19, 797-817.
- [52] Silberman I. Planetary Waves in the Atmosphere, J. Meteor., 1954, 11 (1), 27-34.
- [53] Simmons A. J., J. M. Wallace and G. W. Branstator. Barotropic Wave Propagation and Instability, and Atmospheric Teleconnection Patterns. J. Atmos. Sci., 1983, 40 (6), 1363-1392.
- [54] Skiba Yu. N. Unique solvability of the equation of a barotropic vortex of viscous fluid in classes of generalized functions on a sphere. Depart. Numer. Mathematics, Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1988, 194, 56 pp. (Russian).
- [55] Skiba Yu.N. and Denis Filatov (2006). Esquemas conservativos, basados en el método de separación, para la simulación numérica de vórtices en la atmósfera. Interciencia (Venezuela, Revista de Ciencia y Tecnología de América), 3 (1), 16-21.
- [56] Skiba Yu.N. and Ismael Prez Garca (2006). Testing of a numerical instability study algorithm with the Rossby-Haurwitz waves. International Journal of Applied

- Mathematics (Bulgaria, Sofia, Academic Publications, ISSN 1311-1728), vol. 19 (4), pp. 433-460.
- [57] Skiba Yu.N. and Denis Filatov (2007). On splitting-based mass and total energy conserving arbitrary order shallow-water schemes. *Numerical Methods for Partial Differential Equations* (John Wiley & Sons, Wiley InterScience, U.S.A.; ISSN: 0749-159X), 23 (3), 534-552 (published online 26 Oct 2006).
- [58] Skiba Yu.N. (2008). Nonlinear and linear instability of the Rossby-Haurwitz wave, *Journal of Mathematical Sciences* (USA, Springer Science + Business Media, Inc.; New York; Print ISSN: 1072-3374; Online ISSN: 1573-8795), 149 (6), 1708-1725.
- [59] Skiba Yu. N. *Mathematical Problems of the Dynamics of Viscous Barotropic Fluid on a Rotating Sphere*. VINITI, Moscow, 1989, 178 pp. (Russian); Indian Inst. Tropical Meteorology, Pune, India, 1990, 211 pp. (English).
- [60] Skiba Yu. N. On the Long-Time Behavior of Solutions to the Barotropic Atmosphere Model. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1994, 78 (1-4), 143-167.
- [61] Skiba Yu. N. On Dimension of Attractive Sets of Viscous Fluids on a Sphere Under Quasi-Periodic Forcing. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 1997, 85 (3-4), 233-242.
- [62] Skiba Yu. N. Spectral Approximation in the Numerical Stability Study of Non-Divergent Viscous Flows on a Sphere. *Numer. Meth. Part. Differ. Equations*, 1998, 14 (2), 143-157.
- [63] Skiba Yu. N. On the Normal Mode Instability of Harmonic Waves on a Sphere. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2000, 92 (1-2), 115-127.
- [64] Skiba Yu. N. and J. Adem. On the Linear Stability Study of Zonal Incompressible Flows on a Sphere. *Numer. Meth. Part. Differ. Equations*, 1998, 14 (5), 649-665.
- [65] Skiba Yu. N. and A. Y. Strelkov. On the Normal Mode Instability of Modons and Wu-Verkley Waves. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 2000, 93 (1-2), 39-54.
- [66] Skiba Yu. N. and A. Y. Strelkov. Linear stability conditions for steady waves in ideal incompressible fluid on a rotating sphere, in: A. Bermúdez, D. Gómez, Ch. Hazard, P. Joly, J. E. Roberts (Eds), *Fifth International Conference on Numerical*

- Aspects of Wave Propagation, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2000, pp. 369-373.
- [67] Skiba Yu. N. and A. Y. Spectral structure of growing normal modes for exact solutions to barotropic vorticity equation on a sphere, in: E. Ramos, R. Fernández-Flores, A. Santillán-González, G. Cisneros (Eds), Computational Fluid Dynamics: Proceedings of the Fourt UNAM Supercomputing Conference, World Scientific, Singapore, pp. 129-139.
- [68] Skiba Yu. N. Dynamivd of perturbations of the Rossby-Haurwitz wave and the Vezky modon. *Atmosfera*, (6), 1993, 87-125.
- [69] Skiba, Yu.N. (2004). Instability of the Rossby-Haurwitz wave in invariant sets of perturbations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, U.S.A., Academic Press-Elsevier), 290 (2), 686-701.
- [70] Skiba Yu.N. (2004). On the role of the energy and factor norms in the stability study of the Rossby-Haurwitz wave. *WSEAS Transactions on Mathematics* (U.S.A.), 3 (2), 358-363 (ISSN: 1109-2769).
- [71] Skiba Yu. N. On the Spectral problem in the linear stability study of flows on a sphere. *Journal Math. Anal. Appl.* 2002. 270, 165-180.
- [72] Szeptycki P. Equation of hydrodynamics on manifold diffeomorphic to the sphere. *Bull. L'acad. Pol. Sci. Ser. sci. math., astr. phys.* XXI, (N4), 1973. 341-344.
- [73] Thompson Ph. D. A generalized class of exact time-dependent solution of the vorticity equations for nondivergent barotropic flow. *Mar. Wea. Rev.* 1982. 110, 1321-1324.
- [74] Topuriya S.B. Fourier-Laplace series on a sphere. Tbilisi University, Tbilisi, 1987 (Russian).
- [75] Veskley W. T. M. The construction of Barotropic modons on a sphere. *J. Atmosphere Sci* 41 (16). 1984. 2492-2504.

