INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Un análisis comparativo entre la optimización estática y la optimización dinámica

T E S I S

Que para obtener el grado de
Licenciada en Física y Matemáticas

P R E S E N T A
Nataly Hernández Grageda

Director de la Tesis
M. en C. Emigdio Salazar Cordero

México, D.F. Agosto de 2008

Índice general

Objetivos

Este trabajo tiene como propósito abordar con herramienta matemática, el problema conocido en economía como *externalidad*. Para esto, analizamos un problema particular del mundo real: el problema de optimización al que se enfrenta un conjunto de hombres que acuden a pescar al mismo lugar.

Además, se pretende demostrar que la solución del problema de optimización de forma dinámica, supera a la solución obtenida cuando se resuelve de forma estática, en cuanto a beneficios económicos; de esta manera, se busca dar incentivos para estudiar la Optimización Dinámica.

Introducción

Los primeros problemas de optimización tuvieron su origen en el ambito geométrico, no obstante, en la actualidad encontramos un gran número de aplicaciones a diversas áreas como física, química, finanzas o economía.

Los primeros trabajos en Optimización (estática) se remontan al siglo XVII con Isaac Newton (1643-1727), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) y Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Posteriormente, Johann Bernoulli (1667-1748) introdujo los fundamentos del cálculo de variaciones (ver Kamien[3]) y con ello la Optimización Dinámica. A mediados del siglo XX, el matemático ruso Pontryagin y sus colaboradores, Boltanskii, Gamkrelidze y Mishchenko, desarrollaron la Teoría del Control Óptimo (ver Lomeli[5]). De manera simultánea e independiente, Richard Bellman (1957) dió inicio a la técnica conocida como Programación Dinámica.

La optimización ha tenido grandes avances hasta este momento, a pesar de ésto, son pocos los cursos impartidos en nuestra ESFM, en los cuales se aborda y se hace sólo de forma estática; cuando existen al menos tres técnicas de optimización dinámica, que se pueden estudiar para dar una solución eficiente a diversos problemas que planteados de forma estática, resultan poco realistas en un mundo donde todo está en movimiento. Este trabajo pretende dar incentivos para que se preste atención a la Optimización Dinámica; para esto, analizamos un problema económico que ilustra la importancia de resolver problemas de forma dinámica. Realizamos un análisis comparativo entre diversas soluciones, obtenidas a partir de diferentes métodos (estáticos y dinámicos) y, finalmente, argumentamos por qué es óptimo resolver el problema de forma dinámica.

Iniciamos con un capítulo de teoría preliminar; tanto de Matemáticas como de Economía. En la parte correspondiente a Matemáticas, se encuentran definiciones y lemas necesarios para probar dos teoremas, que utilizaremos como herramienta en el Capítulo 2; estos teoremas nos dán las condiciones necesarias y suficientes para caracterizar la solución de un problema de optimización estática. En la sección de introducción económica se encuentra la terminología necesaria, para plantear y resolver el problema analizado en el Capítulo 2, como la definición de *externalidad* y la teoria del productor. En el Capítulo 2, describimos el problema que tiene un grupo de pescadores, cuando acuden a trabajar al mismo lugar; en la Sección 2.1 lo planteamos de forma estática, tomando en cuenta dos casos: el regulado y el no regulado. Similarmente, en la Sección 2.2 resolvemos el caso regulado y el no regulado, pero ahora de forma dinámica y considerando distintos regímenes de administración, en el caso regulado. Finalmente, realizamos una comparación entre los resultados encontrados y concluimos que los obtenidos al resolver dinámicamente son mejores que los del planteamineto estático.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Optimización

El problema que planteamos en esta tesis es de optimización (concretamente de maximización). Iniciamos con la notación, definiciones y principales resultados sobre optimización de funciones de una variable.

El problema de maximizar una función $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, con restricciones, se puede presentar en la forma

$$\max_x \quad f(x)$$

$$\text{s.a.} \quad g_i(x) = b_i, \text{ con } i = 1, 2, ..., m$$

$$h_j(x) \leq c_j, \text{ con } j = 1, 2, ..., r$$

donde $g_i(x)$ y $h_j(x)$ son funciones escalares de n variables reales, y b_i, $c_j \in R$. La función f se denomina *función objetivo* y el conjunto:

$$S = \{x \in D \,| g_i(x) = b_i, i = 1, 2, ..., m, h_j(x) \leq c_j, j = 1, 2, ..., r\}$$

se llama *conjunto factible*. Para los problemas de optimización estática sin restricciones, que son los que nos interesan, el conjunto factible coincide con el dominio de la función objetivo. En esta sección nos enfocaremos a problemas de optimización estática sin restricciones, especialmente, al caso de maximización (el caso de minimización es análogo).

Definición 1.1.1. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, se dice que $f(x)$ tiene un máximo local en el punto x_0 del conjunto factible S, si existe $B(x_0, \epsilon)$ tal que*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon) \cap S$$

Si la desigualdad se cumple de manera estricta, se dice que x_0 es un máximo local estricto de f.

Definición 1.1.2. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, se dice que $f(x)$ tiene un máximo global en el punto x_0 del conjunto factible S, si*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in S$$

Si la desigualdad se cumple de manera estricta, se dice que x_0 es un máximo global estricto de f.

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias para la existencia de un máximo local.

Teorema 1.1.1 (Condiciones de primer orden)**.** *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, D conjunto abierto y $f \in C^1(D)$. Si en $x_0 \in D$ hay un máximo local de f, entonces $\nabla f(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f tiene un máximo local en $x_0 \in D$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon)$$

con $B(x_0, \epsilon) \subseteq D$. Supongamos, además, que $\nabla f(x_0) \neq 0$, por lo tanto, en la dirección del gradiente

$$v = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

a partir del punto x_0, el valor de f se incrementa, pero esto es una contradicción pues supusimos que x_0 es un máximo local, de lo que se concluye que

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

$\square$

Como las condiciones del Teorema 1.1.1 son necesarias, no todos los puntos detectados son máximos locales; más adelante daremos condiciones suficientes.

Definición 1.1.3. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, D conjunto abierto, $f \in C^1(D)$ y $x_0 \in D$, se dice que x_0 es un punto crítico de f si $\nabla f(x_0) = 0$.*

Para determinar si un punto crítico es máximo, emplearemos una clase especial de funciones.

Definición 1.1.4. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$ conjunto convexo y no vacío, se dice que f es cóncava en D si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

La definición de función cóncava es complicada, por lo que necesitaremos otras equivalentes, que son válidas si la función es diferenciable.

Lema 1.1.1. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R$, D conjunto abierto, $f \in C^2(D)$, entonces*

$$f \textit{ es cóncava en } D \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in D.$$

Demostración. Necesidad. Como $f \in C^2(D)$, entonces

$$f''(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \quad \forall a \in D \qquad (I)$$

este resultado se puede probar facilmente aplicando 2 veces la regla de L'Hôpital[1] (el recíproco no siempre es cierto, puede ocurrir que el límite exista y sin embargo $f''(a)$ no exista).

Dada $a \in D$, sea h tal que $a+h$ y $a-h$ pertenecen a D, entonces, como $a = \frac{1}{2}((a+h) + (a-h))$ y f es cóncava en D, se tiene

$$f(a) = f(\frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)) \geq \frac{1}{2} f(a+h) + \frac{1}{2} f(a-h).$$

Por lo tanto, $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \leq 0$. Puesto que $h^2 > 0 \quad \forall h \neq 0$, se sigue que el límite (I) debe ser menor o igual que cero, de esta manera,

$$f''(a) \leq 0 \quad \forall a \in D.$$

Suficiencia. Sean x_1, x_2 dos puntos cualesquiera de D, sea $0 < t < 1$ y sea

$$x_0 = (1-t)x_1 + t x_2,$$

[1] Para consultar detalles sobre la regla de L'Hôpital, ver Rudin [9].

al aplicar el Teorema de Taylor (Ver Bartle[1]) a f en x_0 se obtiene un punto c_1 entre x_0 y x_1 tal que

$$f(x_1) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}f^{''}(c_1)(x_1 - x_0)^2,$$

y un punto c_2 entre x_0 y x_2 tal que

$$f(x_2) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{1}{2}f^{''}(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Si $f^{''}$ es no positiva en D, entonces el término

$$R := \frac{1}{2}(1-t)f^{''}(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}tf^{''}(c_2)(x_2 - x_0)^2$$

tampoco es positivo. Se obtiene, por lo tanto, que

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1)+tf(x_2) &= f(x_0)+f^{'}(x_0)((1-t)x_1+tx_2-x_0)+\frac{1}{2}(1-t)f^{''}(c_1)(x_1-x_0)^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}tf^{''}(c_2)(x_2 - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + R \\ &\leq f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que f es una función cóncava en D. $\square$

Lema 1.1.2. *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$ conjunto convexo no vacío y $f \in C^1(D)$, entonces*

$$f \quad \text{es cóncava en} \quad D \Leftrightarrow f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle\,, \quad \forall x, y \in D.$$

Demostración. Necesidad.Por ser f cóncava en D se verifica que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0,1]\,.$$

Factorizando, tenemos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(y + \lambda(x-y))$$

y

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) = f(y) + \lambda(f(x) - f(y))$$

de lo que se sigue que

$$f(y + \lambda(x - y)) \geq f(y) + \lambda(f(x) - f(y)).$$

Para $\lambda > 0$, se cumple

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \geq f(x) - f(y),$$

tomando el límite cuando λ tiende a 0, resulta

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \geq f(x) - f(y)$$

Por ser f diferenciable, el primer término de la desigualdad es $\|x - y\| \, f'_{x-y}(y) = \langle \nabla f(y), x - y \rangle$, por tanto, se verifica $\langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq f(x) - f(y)$, es decir,

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \quad \forall x, y \in D.$$

Suficiencia. Sean $x, y \in D,\ \lambda \in [0, 1]$, considere $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$, por hipótesis

$$f(x) \leq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle \quad f(y) \leq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle$$

si se sustituye $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ en ambas desigualdades, se tiene

$$f(x) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda) y), (1 - \lambda)(x - y) \rangle$$

$$f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) + \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda) y), \lambda(y - x) \rangle$$

que se pueden escribir de la forma

$$f(x) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) + (1 - \lambda) \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda) y), x - y \rangle$$

$$f(y) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda) y) - \lambda \langle \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda) y), x - y \rangle .$$

Multiplicando la primera desigualdad por λ y la segunda por $(1 - \lambda)$ y sumando, se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y),$$

es decir, f es cóncava. $\square$

Ahora podemos dar condiciones suficientes para caracterizar un punto crítico como máximo global.

Teorema 1.1.2 (Condiciones de segundo orden). *Sea $f : D \to R$, con $D \subseteq R^n$, D conjunto abierto y convexo, $f \in C^2(D)$ y $x_0 \in D$ un punto crítico de f. Si f es cóncava en D, entonces f tiene un máximo global en x_0.*

Demostración. Supongamos que f es cóncava en D, entonces por el Lema 1.1.2 se tiene que

$$f(x) \leq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \quad \forall x \in D$$

pero $\nabla f(x_0) = 0$, pues x_0 es un punto crítico de f, lo cual implica que

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D$$

es decir, f tiene un máximo global en x_0.

□

1.2. Introducción económica

Antes de presentar la definición de *externalidad*, es conveniente introducir los siguientes conceptos.

Los agentes económicos son las unidades de decisión de nuestro modelo. Asociaremos la idea de comportamiento racional al de maximizar sus funciones objetivo individuales, sobre sus conjuntos de consumo o producción. Existen dos tipos de agentes:

- Consumidores que deciden sobre planes de consumo, buscando maximizar su utilidad, bajo sus limitaciones de riqueza. Los habitantes de nuestro país por ejemplo.

- Productores que deciden planes de producción, buscando maximizar sus beneficios, con la limitación de los conocimientos tecnológicos disponibles. Como por ejemplo, las empresas.

En este trabajo omitiremos la teoría del consumidor, debido a que en el problema que se plantea sólo se considera al productor.

Según Perloff[8], una *empresa* es una organización que transforma factores productivos, como el trabajo, las materias primas y el capital, en productos, como bienes o servicios que vende.

Supongamos que una empresa cuenta con L bienes, que pueden servir como factores o productos. Un *vector de producción* o *plan de producción* es un vector

$y = (y_1, ..., y_L) \in R^L$ que describe el proceso de producción. Los números positivos denotan productos y los negativos, insumos (factores productivos); algunas entradas pueden ser cero, lo que significa que el bien correspondiente a esa entrada no se utilizó y no se produjo. Por ejemplo, si $L = 5$, entonces $y = (-5, 2, -6, 3, 0)$ significa que 2 y 3 unidades de los bienes 2 y 4, respectivamente, son producidas, mientras 5 y 6 unidades de los bienes 1 y 3, respectivamente, son usadas, el bien 5 no se utilizó y no se produjo.

El conjunto de los vectores de producción que son factibles para la empresa se llama *conjunto de producción* y es denotado por $Y \subset R^L$, el cual está limitado por las restricciones tecnológicas de la empresa.

Dado un vector de precios[2] $p >> 0$ y un vector de producción $y \in R^L$, los *beneficios* de la empresa se definen como $\pi = p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l$; en palabras, los beneficios de la empresa son los ingresos que obtiene al vender sus productos menos los costos en que incurre al producirlos.

El objetivo de las empresas es maximizar sus beneficios, condicionadas a sus restricciones tecnológicas, es decir, cada empresa resuelve el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \underset{y}{máx} & \{\pi = p \cdot y\} \\ \\ s.a & y \in Y \end{array}$$

1.2.1. Externalidades

Una definición clásica, tomada de Laffon[4], dice que una *externalidad* es cualquier efecto indirecto, ocasionado por actividades de consumo o producción, sobre una función de utilidad, un conjunto de consumo o un conjunto de producción. Por "indirecto" nos referimos a que el efecto es causado por un agente económico distinto al que es afectado y además, que el efecto no es transmitido o contabilizado a través del precio. Las externalidades se clasifican, en función del efecto que causan, como:

- Positivas. Se producen cuando las acciones de un agente aumentan el bienestar (utilidad o beneficio) de otros agentes de la economía, es decir el efecto indirecto es benéfico. Por ejemplo, supongamos que existe un cultivo de árboles frutales en un lugar determinado. Vecino a éste se encuentra una empresa que extrae miel de abejas. Las abejas, para producir miel, necesitan del néctar de las flores; a su vez, para que los árboles den frutas, es necesario

[2] $p >> 0$ denota un vector con todas sus entradas mayores que cero.

que exista una polinización, la cual se facilita por el movimiento de insectos de flor en flor. Por lo tanto, sin haber pagado por ello, el dueño de los árboles está beneficiándose de una externalidad positiva por el hecho de que el vecino produzca miel de abejas y tenga abejas cercanas a su cultivo. De la misma forma, el vecino está recibiendo una externalidad positiva, producida por el cultivo de árboles, por el hecho de tener cerca las flores de éstos.

- Negativas. Se producen cuando las acciones de un agente reducen el bienestar(utilidad o beneficio) de otros agentes de la economía, sin que exista algún pago apropiado que la compense, es decir, el efecto indirecto es perjudicial debido a que la actividad que genera la externalidad negativa es realizada en un mayor grado que el socialmente deseable. Supongamos, por ejemplo, que existe un criadero de truchas en un lugar determinado. Para que las truchas crezcan y se desarrollen correctamente, deben mantenerse en aguas limpias; libres de contaminación. Sin embargo, en un lugar cercano, existe un cultivo de flores que utiliza químicos para controlar las plagas de las flores. Por el viento y las condiciones climáticas, estos químicos contaminan las fuentes de agua cercanas, por lo tanto, el criador de truchas se ve seriamente afectado por las acciones del cultivador de flores cercano, y no es compensado por ello; es decir, está sufriendo un efecto negativo externo a él.

La externalidad que analizaremos en este trabajo se debe al efecto indirecto ocasionado por las decisiones de producción de un pescador sobre los conjuntos de producción de los demás y viceversa; por lo que se denomina externalidad mutua en la producción. Consideremos, como ejemplo, un apicultor y un huerto: las abejas polinizan las flores, el apicultor (empresa 1) afecta las posibilidades de producción del huerto; inversamente, por proporcionar las flores de las cuales se puede obtener la miel, el huerto (empresa 2) fomenta la producción de miel, este ejemplo es una buena ilustración de una externalidad mutua positiva en la producción. A diferencia de este ejemplo, en nuestro caso, la externalidad será negativa.

Existen diversas formas de resolver un problema de externalidades, como: cobrar impuestos a quien está generando una externalidad, cuando ésta sea negativa; asignar derechos de propiedad para crear un mercado a la externalidad o fusionar empresas cuando se trata de externalidades en la producción. Como el problema que vamos a abordar presenta una externalidad en la producción, la forma en la que la resolveremos será fusionando las empresas; de esta manera la nueva empresa fusionada deberá maximizar los beneficios agregados, lo cual permitirá eliminar la externalidad o bien hará que se produzca en el nivel socialmente óptimo.

Capítulo 2

El problema

2.1. Problema estático

Consideremos el caso de una industria pesquera. La pesca total anual y, depende de la cantidad existente de peces s y del número de botes pesqueros activos b(en cada bote sólo hay un pescador), valores no enteros de b implica que algunos botes sólo pescan una parte de la temporada. La pesca aumenta con la cantidad existente de peces, entre más haya, es más fácil capturarlos; aumenta también debido al incremento de botes, pero cada bote que va a pescar incrementa la pesca total en una cantidad cada vez menor. Estas relaciones son simuladas por una función de la siguiente forma:

$$y = y(s, b) \qquad \frac{\partial y}{\partial s} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial b} > 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial b^2} < 0$$

Sabemos que la pesca no es gratis, deben utilizarse recursos para mandar cada bote a la pesca, así que la industria pesquera incurre en costos de producción. Si w es el costo de mandar un bote, el costo total de pescar es:

$$c = wb.$$

El párrafo anterior describe, de manera general, el problema que analizaremos; como ya vimos en el capítulo uno, este problema constituye un ejemplo de externalidad negativa mutua en la producción, pues si consideramos a cada pescador como una empresa, podemos ver que las acciones de un pescador, cualquiera que este sea, afectan al resto de los pescadores y viceversa, ya que disminuyen sus posibilidades de pesca, al disminuir la reserva de peces; además, tal efecto negativo no es compensado.

2.1.1. No regulado

En esta sección resolveremos el problema de la industria pesquera, bajo la hipótesis, de que no hay un administrador que coordine a toda la industria; es decir, cada pescador toma sus propias decisiones, dicho de otra forma, cada uno constituye una empresa.

Consideremos los siguientes tres supuestos:

1. Hay un gran número de botes.

2. El pescador de cada bote decide (independientemente de otros) si pesca o no.

3. Cada pescador decide según la siguiente regla:

    - Ir a pescar, si los beneficios estimados son positivos.
    - No ir a pescar, si los beneficios estimados son negativos.

Un pescador puede estimar sus beneficios observando el éxito de los botes que están pescando actualmente, si cree que él no será ni más ni menos exitoso que el pescador promedio, el estimado de su potencial de pesca es la pesca promedio y/b. El costo de obtener esa pesca es w; así, sus beneficios serían $y/b - w$, entonces, su regla de decisión será:

- **Ir a pescar si $y > wb$.**

- **No ir a pescar si $y < wb$.**

Bajo esta regla de decisión, el número de botes en equilibrio, b^0, será el número de botes para el cual los beneficios son iguales a cero

$$y(s, b^0) = wb^0,$$

pues cuando se satisface esta condición, ningún pescador tiene incentivos a cambiar sus planes; botes activos seguirán siendo activos y botes inactivos seguirán siendo inactivos. Este equilibrio es estable, pues si hay menos botes activos que b^0, estos tendrán beneficios positivos y los pescadores inactivos decidirán ir a pescar; así b aumenta hasta b^0. Si hay más botes activos que b^0, estos tendrán pérdidas y algunos dejarán de pescar; así, b disminuye hasta b^0. Sin importar el número inicial de botes activos b, la motivación de beneficio moverá el número b al de equilibrio b^0.

Por lo tanto, la solución al problema estático no regulado es tal que, los pescadores no tienen beneficios económicos; las ganancias obtenidas al vender los pescados son iguales a los costos que tienen al ir a pescar.

Consideremos un caso particular del problema de la industria pesquera. Supongamos que y y $s^0 > 0$ (reserva inicial) están medidos en miles de toneladas de peces, b en miles de botes; aunque el costo de mandar un bote a pescar comunmente se mide en unidades monetarias, en nuestro modelo no tenemos precios, así que lo haremos en términos reales, w estará medido en toneladas de peces por bote. En el modelo, utilizaremos la siguiente función de producción[1]

$$y = 0{,}01 s^0 b^{\frac{1}{2}}$$

$$w = 0{,}125$$

Sabemos que el número de botes de equilibrio b^0 es tal que los beneficios son cero, es decir, para el cual $y(s^0, b^0) = wb^0$:

$$0{,}01 s^0 b^{\frac{1}{2}} = 0{,}125 b$$

lo cual implica que el número de botes de equilibrio es

$$b^0 = (0{,}08 s^0)^{\frac{1}{2}}$$

2.1.2. Regulado

Ahora supongamos que el pescador se pone bajo el control de una agencia que busca maximizar los beneficios netos de la pesca

$$\pi = y(s, b) - wb,$$

es decir, vamos a considerar a todos los pescadores como una sola empresa. La agencia puede ajustar los beneficios regulando el número de botes activos b. El problema que debe resolver la agencia es el siguiente, para s fijo,

$$\underset{b}{m\acute{a}x} \quad \{\pi = y(s, b) - wb\}$$

Utilizando la teoría sobre optimización estática, presentada en el capítulo uno, resolveremos el problema de la agencia.

[1] Una función de producción muy utilizada en economía es $f(x, y) = kx^{\alpha} y^{\beta}$ con $\alpha, \beta > 0$ y $k > 0$, conocida como función Cobb-Douglas. Para nuestro ejemplo tomamos un caso particular de ésta.

Condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi}{\partial b} = \frac{\partial y}{\partial b} - w = 0$$

o bien,

$$\frac{\partial y}{\partial b} = w$$

Condición de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial b^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial b^2}$$

Pero, una de nuestras hipótesis sobre la función y, es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} < 0,$$

entonces, por el Lema 1.1.1, la función y es una función cóncava, cuando s es fijo. Por el Teorema 1.1.2, si b^* es un punto crítico de π, es decir, $\frac{\partial y}{\partial b} = w$, entonces b^* es un máximo global de la función π.

El beneficio máximo obtenido cuando hay b^* botes pescando puede ser mostrado gráficamente (ver Figura 2.1). Los beneficios para cualquier b son representados por la distancia vertical entre y y c. Cuando b se incrementa desde cero, esta distancia se incrementa, alcanza su máximo, y decrece hasta cero en b^0. Los beneficios son maximizados en el valor de $b = b^*$ donde la distancia vertical es máxima.

Notemos que, $\partial y/\partial b$ es la pendiente de la tangente a la curva y y w es la pendiente de c, en la Figura 2.1. Así, la ecuación anterior muestra que la distancia vertical entre las dos curvas es máxima, cuando la pendiente de la tangente a y coincide con la pendiente de c.

Resolvamos el mismo ejemplo algebraico, que en el caso no regulado, para poder comparar ambos resultados.

$$\underset{b}{\text{máx}} \quad \left\{\pi = 0{,}01 s^0 b^{\frac{1}{2}} - 0{,}125 b\right\}$$

C.P.O $\quad \frac{1}{2}(0{,}01) s^0 b^{-\frac{1}{2}} - 0{,}125 = 0$

lo cual implica que

$$b^* = \left(\frac{25}{s^0}\right)^{-2}$$

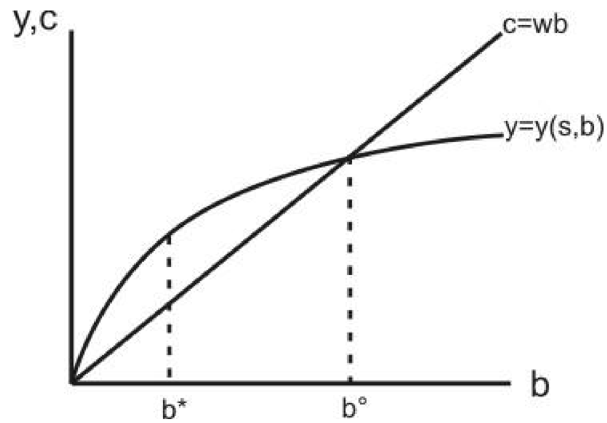

Figura 2.1: b^* resuelve el problema regulado y b^0 el no regulado.

maximiza los beneficios de la pesca. Así,

$$\pi^* = 0{,}0002 \left(s^0\right)^2 > 0.$$

Este resultado concuerda con lo que observamos en la gráfica 2.1, es decir, que los beneficios obtenidos al resolver el problema estático regulado son positivos; a diferencia del no regulado, donde los beneficios son cero. Económicamente, también tiene sentido, pues como mencionamos en el capítulo uno, una manera de solucionar el problema de las externalidades en la producción es fusionando las empresas que lo presentan; entonces, si consideramos a cada pescador como una empresa, al ponerlos bajo la administración de una agencia, es como si estuviéramos fusionando las empresas en una sola, con lo cual se resuelve el problema; lo que origina que en el problema regulado los beneficios sean positivos y no cero como en el no regulado, donde se tenía el problema de la externalidad negativa en la producción.

2.2. Problema dinámico

Si la industria pesquera es observada a través del tiempo, podemos colocar subíndices a las variables: s_{2003}, por ejemplo, es la reserva de peces en 2003 y s_{2004} es la reserva en 2004. De forma más general, s_t es la reserva en el año t, s_{t+1} es la reserva en el siguiente año, y así sucesivamente. Con la adición de subíndices, nuestro modelo original es caracterizado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_t &= y(s_t, b_t) \\ c_t &= w b_t \end{aligned} \tag{2.1}$$

A estas ecuaciones añadimos otra, la ecuación de movimiento, la cual indica que la reserva de peces en el siguiente año es la reserva de peces en el año presente ajustado por dos factores, los peces obtenidos en forma de reproducción natural y los peces perdidos por pesca:

$$s_{t+1} = s_t + g_t - y_t \tag{2.2}$$

Aquí, g_t es la acumulación natural en la reserva de peces. Estas adiciones netas son la diferencia entre nacimientos y muertes naturales (causadas por edad adulta, enfermedades y cualquier otra cosa, excepto ser capturados). El incremento neto natural actual es determinado por la reserva de peces actual:

$$g_t = g(s_t) \qquad \frac{dg}{ds} > 0, \quad \frac{d^2 g}{ds^2} < 0 \tag{2.3}$$

La restricción en la primera derivada indica que la suma neta de peces se incrementa con la reserva (porque el número de nacimientos se incrementa con el número de peces en reproducción). La restricción en la segunda derivada implica que la tasa de crecimiento de la reserva (g/s) disminuye cuando aumenta s. Una reserva mayor de peces implica más competencia por alimento y mayor facilidad en la transmisión de enfermedades y parásitos entre peces, con ello la tasa natural de mortandad se incrementa (así la tasa de crecimiento decrece) al incrementarse la reserva.

Estados estacionarios

Una industria pesquera en evolución (generalmente) alcanzará un estado estacionario, y nosotros queremos comparar el estado estacionario obtenido mediante organizaciones de pesca alternativas. Un estado estacionario para nuestro problema es definido como:

> Un *equilibrio de estado estacionario* es una pareja (s', b') para la cual se verifican dos condiciones:
>
> (a) existen b' botes activos cuando la reserva de peces es s'.
>
> (b) si $b_t = b'$ y $s_t = s'$, entonces $s_{t+1} = s'$.

Un equilibro de estado estacionario es una situación que se replica año tras año. Suponga, por ejemplo, que la reserva de peces en el año actual (llamemos año 0) es s', *i.e.*, $s_0 = s'$. Así, (a) nos dice que b_0 es igual a b', y (b) nos dice que s_1 es igual a s'. Aplicando (a) otra vez, nos dice que b_1 es igual a b'. Esto es, la reserva de peces y el número de botes activos son los mismos en el año 1 como en el año 0. Aplicando repetidamente (b) y (a) alternadamente, se observa que una situación similar ocurrirá en cada año subsecuente, nunca hay cambios, la industria pesquera se encuentra en un estado estacionario.

¿Qué es lo que tenemos que hacer para encontrar un estado estacionario? La definición nos dice que estamos buscando los valores de dos incógnitas, b y s; entonces necesitamos 2 ecuaciones independientes que relacionen a ambas. La definición también nos dice que un estado estacionario debe satisfacer dos condiciones, así nuestra estrategia será aplicar estas condiciones en forma de ecuación y resolverlas para obtener las incógnitas.

El lugar geométrico de posibles estados estacionarios

La ecuación que corresponde a la condición (a) muestra el número de botes que estarán activos para cada nivel de la reserva de peces. La forma de esta ecuación dependerá de la forma en la cual la industria pesquera esté organizada; por ejemplo, la respuesta es diferente para una industria pesquera regulada que para una que no lo está, pospongamos esta pieza del rompecabezas para más adelante y empecemos con algo un poco más sencillo. La condición (b) depende de factores puramente técnicos que podemos fácilmente traducirlos en una ecuación.

La ecuación (2.2) muestra que s_{t+1} es igual a s_t, si y sólo si, la captura compensa exactamente la adición natural neta de la reserva de peces:

$$g_t = y_t \quad \forall t$$

Sustituyendo, de (2.1) y (2.3), obtenemos

$$g(s) = y(s, b) \tag{2.4}$$

Donde s y b son variables contemporáneas (es decir, son evaluadas en el mismo año). Cualquier pareja (b', s') que satisface (2.4) también satisface la condición (b) anterior, por (2.2.) Existen infinidad de pares con esta propiedad, y el conjunto de todos estos pares se llamará el *lugar geométrico de posibles estados estacionarios.*

La pendiente de la tangente a este lugar geométrico se deduce en la Figura 2.2, bajo el supuesto de que la curva y corta a la g; donde b_0 y b_1 son dos valores arbitrarios de b, con $b_0 < b_1$. Si hay b_0 botes activos, las adiciones naturales netas y

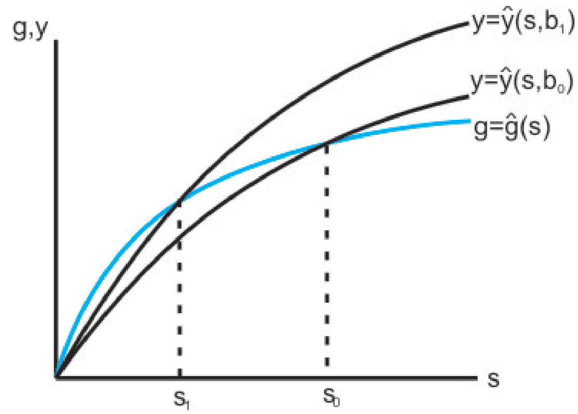

Figura 2.2: Deducción del estado estacionario.

la captura son iguales cuando la reserva es s_0. Si hay b_1 botes activos, las adiciones naturales netas y la captura son iguales cuando la reserva es s_1. De aquí se sigue que (b_0, s_0) y (b_1, s_1) son dos puntos que están en el lugar geométrico de posibles estados estacionarios. Al trazar estos puntos la gráfica muestra inmediatamente que el lugar geométrico de ellos es decreciente (ver la Figura 2.3 donde el lugar geométrico es llamado ss).

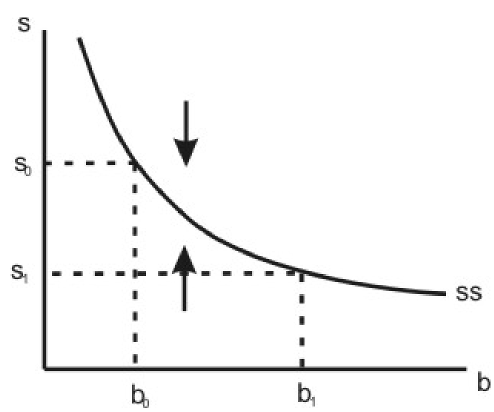

Figura 2.3: Lugar geométrico del estado estacionario.

Regresando a la Figura 2.2, también muestra lo que implica estar fuera del lugar geométrico de posibles estados estacionarios. Suponga que el número de botes activos es fijo en b_0, sabemos que la reserva de peces no aumenta ni disminuye cuando la reserva es s_0; si la reserva es menor que s_0, adiciones naturales netas a la reserva exceden la captura, causando que la reserva de peces para el año siguiente sea mayor que la reserva de este año; así, la reserva está acercándose a s_0. En la mima figura, si la reserva es mayor que s_0, adiciones naturales netas son menores que la captura, así la reserva disminuirá hasta alcanzar s_0. Las flechas en la Figura 2.3 reflejan estos resultados.

Debemos notar que las conclusiones del párrafo anterior dependen de la forma en que la Figura 2.2 está dibujada y, en particular, del supuesto de que la gráfica de y corta la gráfica de g.

El mapa de iso-beneficios

Hemos visto la relación que existe entre el número de botes activos y el tamaño de la reserva de peces; sin embargo, los pescadores toman decisiones con el objetivo de maximizar sus beneficios; así, nosotros no somos capaces de decir mucho sobre su comportamiento, a menos que sepamos que beneficios obtienen de cualquier decisión dada. Hay algunos aspectos que nos dicen exactamente eso.

Una *curva de iso-beneficio* o curva de nivel, muestra todos los pares (s, b) que otorgan un nivel constante de beneficio. Hay una curva para cada nivel de beneficio, y juntas, constituyen un *mapa de curvas iso-beneficio.* El mapa de curvas iso-beneficio cubre completamente el cuadrante (s, b), en el sentido de que cada punto en el cuadrante pertenece a alguna curva de iso-beneficio.

En el mapa de curvas de iso-beneficio mostrado en la Figura 2.4 (considerando a s como función de b), la curva $\pi = 0$ muestra todos los pares (s, b) en los cuales el beneficio es cero, sobre ella están las curvas de iso-beneficio asociadas con niveles de beneficios positivos. Las curvas de iso-beneficio son estrictamente convexas (pues π es una función estrictamente cóncava por hipótesis, ya que y es estrictamente cóncava y c es lineal) y los beneficios se incrementen cuando nos movemos de una curva de iso-beneficio hacia otra que está por encima de ella.

Para entender porque el mapa de curvas de iso-beneficio debe tener la forma que aparece en la Figura 2.4, recordemos que los beneficios son la diferencia entre la captura y los costos

$$\pi = y(s, b) - wb$$

así, al incrementarse la reserva de peces, también la cantidad capturada y los beneficios, aumentan. Como vemos en la Figura 2.4, un incremento en s siempre nos lleva a mayores beneficios. Ahora, consideremos el efecto de cambios en b al incrementarse el número de botes activos, los beneficios se incrementarán si $\partial y/\partial b - w > 0$ y disminuirán cuando $\partial y/\partial b - w < 0$. Por hipótesis, $\partial y/\partial b$ dis-

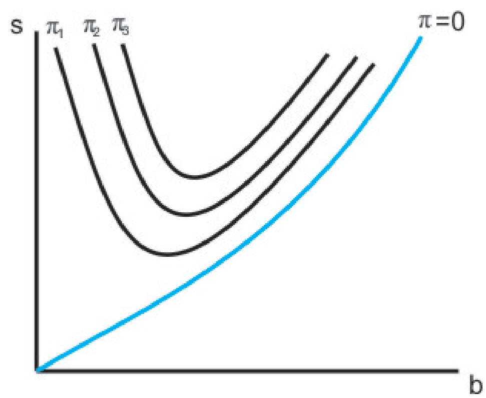

Figura 2.4: Mapa de iso-beneficio.

minuye cuando b se incrementa ($\frac{\partial^2 y}{\partial b^2} < 0$), los beneficios primero se incrementan y luego disminuyen, cuando b se incrementa partiendo de 0. Consecuentemente, otra propiedad de un mapa de iso-beneficio es que, iniciando en cualquier punto en el eje de las ordenadas, un movimiento hacia la derecha primero arroja un beneficio mayor y luego un beneficio menor; por lo tanto, el mapa de iso-beneficio en la Figura 2.4 tiene esta propiedad.

2.2.1. No regulado

Considere otra vez la organización de mercado descrita en la sección 2.1.1 donde existía un gran número de propietarios de botes independientes y cada propietario pesca (o no pesca) si el promedio de captura, y/b, excede (o no alcanza) el costo de pesca, w. Ahora tenemos el mismo caso, excepto que se optimizará a lo largo del tiempo; notemos que el número de botes activos en cada periodo, bajo este régimen, también será con el que se obtengan beneficios cero; ya que es el mismo problema de la sección 2.1.1 sólo que se resuelve para varios periodos de tiempo. Así, se sigue, que la parte con pendiente ascendente de la curva de iso-beneficio asociada con beneficios cero es también una gráfica de la relación entre el número de botes activos y la reserva de peces. Esta observación nos permite describir la dinámica de la industria pesquera. Suponga, por ejemplo, que la reserva inicial de peces es s_0(ver Figura 2.5), el número de botes activos debe ser b_0; así, la industria pesquera, en el año inicial, se posiciona por encima del punto de posible estado estacionario. La captura excederá la adición natural neta (recuerde el significado de las flechas en la Figura 2.3); la reserva de peces en el segundo año será menor

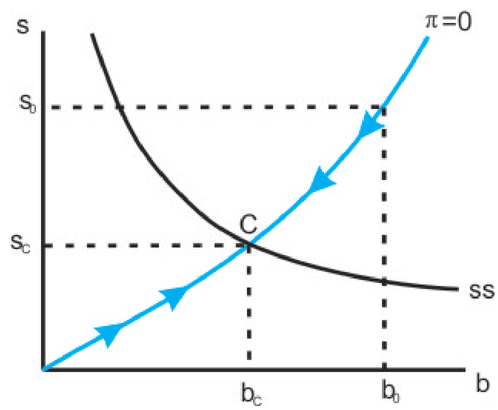

Figura 2.5: El estado estacionario, problema no regulado.

que en s_0, el número de botes activos en el segundo año será ajustado para que la industria pesquera se mantenga en la curva de cero beneficios, pero aún encima de la posición del posible estado estacionario. Ya que la posición se encuentra otra vez por encima del punto de posible estado estacionario, la reserva será menor en el tercer año que en el segundo, el número de botes es ajustado para regresar a la industria pesquera a la posición en la curva de beneficios cero, todavía por arriba de la posición de posible estado estacionario. Este proceso es repetido año tras año, acercando a la industria pesquera hacia el punto C, el cual tiene las coordenadas (b_C, s_C); este punto es el equilibrio en estado estacionario para una industria pesquera no regulada. Similarmente, si la reserva inicial de peces es menor que s_C, el estado estacionario de equilibrio es alcanzado por “un movimiento hacia arriba” en la curva de cero beneficios.

Resolvamos el problema algebraico, que hemos planteado en las secciones anteriores, bajo los supuestos del problema dinámico no regulado, para eso, definimos una función g que satisface los supuestos de una función de acumulación natural en la reserva de peces. Empleando un análisis gráfico, con ayuda de la Figura 2.5, concluimos que el punto de equilibrio al que se llega después de resolver el problema dinámico no regulado, es tal que, se encuentra en la intersección de la curva de posibles estados estacionarios (ss) y la curva de iso-beneficio cero (π=0). Determinémoslo algebraicamente

$$y_t = 0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}}$$

$$w = 0{,}125$$

$$g_t = 0{,}01[s_t - 0{,}01(s_t)^2]$$

y la ecuación de movimiento

$$s_{t+1} = s_t + 0{,}01[s_t - 0{,}01(s_t)^2] - 0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}}$$

La curva de posibles estados estacionarios satisface la condición $g_t = y_t$ para todo t; luego, de las ecuaciones anteriores, resulta

$$0{,}01[s_t - 0{,}01(s_t)^2] = 0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}}$$

lo cual implica que (ss) es

$$s_t = 100(1 - b_t^{\frac{1}{2}}). \tag{2.5}$$

Enseguida, determinamos la curva de iso-beneficio cero, la cual debe satisfacer $y_t = c_t$; sustituyendo las ecuaciones del ejemplo, obtenemos

$$0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}} = 0{,}125 b_t$$

de donde, la curva π=0 es

$$s_t = 12{,}5 b_t^{\frac{1}{2}} \tag{2.6}$$

El punto de equilibrio debe satisfacer (2.5) y (2.6); esto se traduce en la siguiente ecuación:

$$100(1 - b_t^{\frac{1}{2}}) = 12{,}5 b_t^{\frac{1}{2}}$$

y resolviendo, tenemos que el punto de equilibrio es

$$(s^c, b^c) = (\frac{100}{9}, \frac{64}{81}),$$

la pesca de equilibrio es $y^c = \frac{8}{81}$; los beneficios sabemos que son cero, al igual que en el caso estático no regulado.

En resumen, si el costo (en términos reales) de mandar un bote a pescar es de 125 kilogramos de peces, encontramos que el número de botes de equilibrio es 790, la reserva de peces de equlibrio deberá ser 11111 toneladas, la pesca de equilibrio 98,765 toneladas y los beneficios obtenidos, cero.

Hasta ahora, podemos decir que resolver el problema de la industria pesquera, como lo hicimos en el caso estático regulado, es la mejor opción; pues en tal caso se obtienen beneficios positivos y se resuelve el problema de la externalidad.

2.2.2. Regulado

Dentro del caso regulado, consideraremos 3 tipos de administración.

Administración miope

Suponga ahora que la industria pesquera es administrada por una agencia, la cual siempre maximiza el beneficio del año presente. Considere la Figura 2.6, e imagine que la reserva de peces actual es s_0; la administración debe elegir el número de botes de equilibrio, es decir, uno de los puntos en la línea horizontal a la altura de s_0. Notemos que los beneficios son cero cuando b es igual a cero, inicialmente se incrementan, mientras b se incrementa y alcanza un máximo en b_1, donde la línea horizontal es tangente a la curva de iso-beneficio factible más alta; aumentos posteriores en b causarán una caída en los beneficios (ya que puntos más allá del punto de tangencia nos llevarán a menores curvas de iso-beneficio) hasta que el beneficio sea otra vez igual a cero cuando b es igual a b_0. Así, el administrador elegirá b_1 botes activos cuando la reserva de peces es s_0.

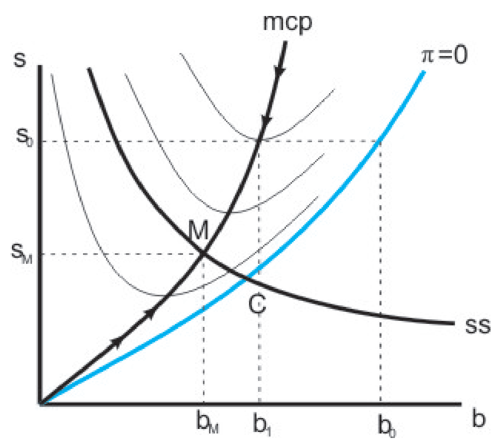

Figura 2.6: Estado estacionario bajo administración miope.

El punto b_1 es caracterizado como el mínimo de la curva de iso-beneficio mayor factible, esta observación será verdadera sin importar la reserva de peces actual: el administrador siempre elegirá el punto mínimo de la curva de iso-beneficio más alta, pues recordemos dos cosas: una, el administrador desea maximizar beneficios; dos, las curvas de iso-beneficio cubren todo el cuadrante positivo del plano cartesiano y además, son estrictamente convexas. La curva *mcp* en la Figura 2.6 consiste de los puntos mínimos de todas las curvas iso-beneficios; este lugar geométrico muestra la relación entre el número de botes activos y la reserva de peces, cuando el administrador maximiza el beneficio presente.

La dinámica de la industria pesquera de ahora es parecida a la de la industria pesquera no regulada, excepto que el rol jugado por la curva de cero-beneficio ahora es jugado por la curva mcp. El estado estacionario de equilibrio, análogamente, ocurrirá en el punto $M = (b_M, s_M)$, donde las curvas ss y mcp se intersecan. Veamos por qué, suponga que la reserva inicial de peces excede s_M, el número de botes activos será el que maximiza el beneficio actual; lo cual significa que el estado inicial de la industria pesquera es representado por un punto en la curva *mcp*; como la reserva es mayor que s_M, este punto estará por encima de *ss*, lo cual implica que la reserva en el segundo año será menor que en el primero. Después de que el número de botes activos es ajustado en el segundo año (de forma que los beneficios actuales sean maximizados de nuevo), el estado de la industria pesquera es otra vez representado por un punto en la curva *mcp*, pero ahora está más cerca del estado estacionario. La reserva de peces disminuye año tras año mientras el estado estacionario es alcanzado. Un proceso similar ocurre si la reserva inicial es menor que s_M, excepto que el estado estacionario es alcanzado mediante "un movimiento hacia arriba" en la curva *mcp*.

Una comparación de los puntos M y C muestran que el estado estacionario bajo una administración miope tiene una reserva de peces mayor, un menor número de botes activos y mayores beneficios que una industria pesquera no regulada.

Aplicaremos el razonamiento anterior al ejemplo algebraico que hemos utilizado en las secciones previas, con el objetivo de mostrar que las conclusiones que obtuvimos se cumplen.

La administración miope elige b_t, para maximizar los beneficios actuales

$$\pi_t = 0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}} - 0{,}125 b_t,$$

hemos visto que los puntos de máximo beneficio se encuentran sobre la curva mcp, que es el lugar geométrico de los puntos mínimos de las curvas de iso-beneficio (si maximizamos los beneficios en cada instante del tiempo, veremos que la curva que resulta coincide con mcp). Una curva de iso-beneficio k, satisface la ecuación

$$\pi_t = 0{,}01 s_t b_t^{\frac{1}{2}} - 0{,}125 b_t = k \tag{2.7}$$

o equivalentemente $s_t = \frac{k}{0{,}01} b_t^{-\frac{1}{2}} + \frac{0{,}125}{0{,}01} b_t^{\frac{1}{2}}$, entonces debemos resolver

$$\min_{b_t} \quad \left\{ \frac{k}{0{,}01} b_t^{-\frac{1}{2}} + \frac{0{,}125}{0{,}01} b_t^{\frac{1}{2}} \right\}$$

aplicando condiciones de primer y segundo órdenes, obtenemos que

$$b_t = \frac{k}{0{,}125} \tag{2.8}$$

es el número de botes en el cual la curva de iso-beneficio tiene su mínimo. De (2.7) y (2.8), obtenemos una ecuación para la curva mcp

$$s_t = \frac{2(0{,}125)}{0{,}01} b_t^{\frac{1}{2}}$$

o bien,

$$b_t = (0{,}04 s_t)^2. \tag{2.9}$$

El punto de equilibrio que estamos buscando es la intersección de la curva ss y la mcp; así, de (2.5) y (2.9) resulta

$$(s^M, b^M) = (20, \frac{16}{25})$$

lo cual implica que, en equilibrio,

$$y^M = \frac{4}{25} \quad \text{y} \quad \pi^M = \frac{2}{25}.$$

En síntesis, si por mandar un bote a pescar debemos pagar 125 kilogramos de peces, entonces, el número de botes de equilibrio debe ser 640, la reserva de equilibrio 20000 toneladas, la pesca total anual 160 toneladas y el beneficio económico 80 toneladas de peces.

La industria pesquera regulada supera a la no regulada; sin embargo, es posible alcanzar mayores beneficios. La administración descrita aquí es miope: se enfoca en beneficios presentes; lo que significa que no considera los efectos de sus acciones en el beneficio futuro, ésta no reconoce que la pesca de hoy disminuye los beneficios de mañana. En seguida consideremos otra alternativa de administración.

Administración con vista lejana

Anteriormente encontramos que existe un conjunto de puntos que pueden llevar a la industria pesquera a un estado estacionario; supongamos ahora que el administrador lo sabe, por lo que él decidirá que la mejor forma de administrar la industria pesquera es elegir el punto en la curva ss que maximiza el beneficio. El mapa de curvas iso-beneficio nos permite identificar este punto (ver Figura 2.7).

Hay un punto F en el cual una curva de iso-beneficio es tangente al lugar geométrico de los posibles estados estacionarios; este punto corresponde a los beneficios de estado estacionario factibles más altos, porque cada curva de iso-beneficio más alta está por encima en todas partes y hacia la derecha del "menú" de estados estacionarios. El problema que resolverá la administración con vista lejana es

$$\max_{b} \quad \{\pi = y(s,b) - wb\}$$

$$\text{s.a.} \quad (b,s) \in ss$$

No sabemos cómo el administrador con vista lejana alcanzará este estado estacionario, pero F es un estado estacionario que él elegirá. El estado estacionario de la industria pesquera, bajo una administración con vista lejana, tiene una reserva de peces mayor, menos botes activos y mayores beneficios que bajo una administración miope.

Mostraremos con el ejemplo algebraico que hemos utilizado, cómo es el comportamiento de la administración con vista lejana, dado por

$$\max_{b} \quad \left\{\pi = 0{,}01sb^{\frac{1}{2}} - 0{,}125b\right\}$$

s.a.

$$s = 100(1 - b^{\frac{1}{2}}). \tag{2.10}$$

Sustituimos (2.10) en la función de beneficios, para obtener un problema de maximización sin restricciones; aplicando condiciones de primer y segundo orden obtenemos

$$(b^F, s^F) = (\frac{16}{81}, \frac{500}{9})$$

lo cual implica que

$$y^F = \frac{80}{81} \quad \text{y} \quad \pi^F = \frac{78}{81}.$$

Por lo tanto, en equilibrio debe haber 197,53 botes, una reserva de 55555 toneladas de peces, 987,65 toneladas de pesca total y 962,962 toneladas de peces como beneficio económico, todo esto, si consideramos que el costo de ir a pescar es de 125 kilogramos de peces por bote.

Aún así, este resultado no es óptimo. El administrador miope se concentra en beneficios actuales a expensas de beneficios futuros; la administración con vista lejana se enfoca en beneficios futuros a expensas del beneficio presente. El administrador óptimo buscará el posible mejor intercambio entre beneficios presentes y futuros.

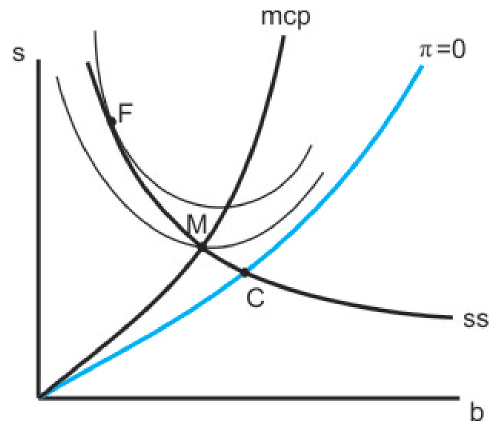

Figura 2.7: El estado estacionario bajo administarción de vista lejana.

La administración óptima

El administrador óptimo sabe que importan tanto los beneficios presentes como los futuros, pero que no importan lo mismo; si la tasa de interés real es r, una unidad de bien producida hoy, vale $1 + r$ unidades del bien en un año más, y una unidad de recursos utilizado hoy vale $1 + r$ unidades de recursos utilizados en un año; el administrador deberá maximizar el valor presente descontado de los beneficios de la industria pesquera, siempre teniendo en cuenta que la reserva de peces evolucionará año con año de acuerdo con la regla (2.2); para ello, debe escoger el número de botes activos en el presente año y en años futuros.

Formalmente, el administrador elige b_t para $t = 0, 1, 2, \ldots$, donde 0 es el año actual, tal que maximicen el valor presente descontado de los beneficios:

$$VPD = \sum_{t=0}^{\infty} (1 + r)^{-t} [y(s_t, b_t) - wb_t]$$

Sujeto a un conjunto de restricciones (una para cada año) que relacionan las reservas de peces a través de los años:

$$s_{t+1} = s_t + g(s_t) - y(s_t, b_t) \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Este problema es sumamente complicado, pero bien definido, y puede resolverse usando Programación Dinámica; o bien, si consideramos el caso de tiempo continuo, es posible trabajarlo como un problema de Cálculo de Variaciones o de Control

Óptimo. A continuación, argumentaremos sobre donde puede situarse el equilibrio de estado estacionario bajo esta administración, no obstante, no emplearemos las técnicas de Optimización Dinámica mencionadas antes, ya que pretendemos dar incentivos para que se estudie (en particular en ESFM) a la Optimización Dinámica y no dar un curso sobre ella.

El plan óptimo del administrador llevará a la industria pesquera a un equilibrio de estado estacionario que se situará en la curva de estados estacionarios posibles, en algún lugar entre los puntos F y M. Mientras mayor sea la tasa de interés, el estado estacionario estará más cercano a M y más alejado de F. Para poder ver por qué ocurre esto, consideremos los casos límite:

- Si la tasa de interés es infinitamente grande, cualquier cosa que ocurra en el año actual es infinitamente más importante que cualquier cosa que ocurra en los siguientes años; lo cual es infinitamente más importante que cualquier cosa que pase un año después, y así sucesivamente. El administrador, bajo estas circunstancias, estará enfocado de lleno en lo que pase a la industria pesquera el año presente, sin importar lo que ocurra en cualquier año. Siempre se concentrará en el beneficio del año cero en el año cero, en el año 1 los beneficios del año 1, y así sucesivamente. Con ello, se comportará esencialmente en la misma forma que el administrador miope y alcanzará un estado estacionario arbitrario cercano al alcanzado por el administrador miope.

- Si la tasa de interés es arbitrariamente cercana a cero, los beneficios recibidos en cada año son vistos casi con el mismo nivel de importancia. El plan del administrador involucrará una transición de la reserva inicial de peces a la reserva de estado estacionario, el cual será (cercanamente) alcanzado en un tiempo finito. Puesto que la transición al estado estacionario es (virtualmente) completa en un tiempo finito, y ya que una cantidad infinita de tiempo es gastada en el estado estacionario, cualquier cosa que ocurra en el estado estacionario, será más importante que cualquier cosa que ocurra fuera del estado estacionario. Bajo estas consideraciones, el administrador esencialmente buscará maximizar los beneficios de estado estacionario y alcanzar un estado estacionario arbitrariamente cercano a aquel alcanzado por el administrador de vista lejana.

2.3. Análisis comparativo

En el problema estático no regulado, los beneficios son cero (en equilibrio), es decir, la sociedad no gana nada de la presencia de los pescadores: el valor de los peces es igual al valor de los recursos gastados en la pesca. Decimos que hay sobre pesca bajo el problema estático no regulado, pues la sociedad hubiese ganado de la pesca (es decir, el valor de los peces hubiese estado por encima del valor de los recursos utilizados en su obtención) si el número de botes activos hubiera sido menor que b^0, como mostramos en el caso regulado; más peces son capturados en b^0, pero más recursos son utilizados para capturarlos, la pesca extra vale menos que los recursos utilizados para su captura. Esta situación se incrementa por la explotación de los peces, y como cualquier recurso de propiedad común, envuelve una externalidad negativa (ver [2]).

Para el caso estático regulado, los beneficios en b^* son positivos, a diferencia del no regulado; la razón es que la externalidad negativa se ha solucionado al fusionar las empresas(pescadores) en una sola(administración).

Similarmente, en el caso dinámico, cuando la industria pesquera no es regulada, se obtienen beneficios cero, debido a la presencia de la externalidad negativa; pero cuando ésta es solucionada, se logra obtener beneficios positivos. En el caso regulado, vimos que los tres tipos de administración obtienen beneficios positivos, sin embago, el estado estacionario de la administración con vista lejana presenta una reserva mayor, menos botes activos y mayores beneficios que la miope; pero, la administración óptima supera a la de vista lejana.

Conclusiones

El objetivo de resolver el problema de la externalidad negativa se cumplió al plantear el problema de la industria pesquera como un problema regulado por una administración; de este modo, logramos obtener beneficios económicos positivos, pero estos beneficios económicos pueden ser superados cuando se optimiza a lo largo del tiempo; es decir, cuando se toma en cuenta tanto el presente como el futuro.

En síntesis, una industria pesquera regulada es mejor que una industria no regulada, ya que resuelve el problema de la externalidad negativa. Por otra parte, dentro de la industria regulada, la administración que obtendrá la mejor solución es la que plantea el problema como uno dinámico de maximización del valor presente de los beneficios descontados.

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G. *Introducción al análisis matemático de una variable*. Editorial Limusa,1996.

[2] Hardin, G. "The Tragedy of the Commons". *Science*162(1968): 1243-1248.

[3] Kamien, Morton I., Schwartz, Nancy L. *Dynamic optimization the calculus of variations and optimal control in economics and management*. North-Holland, 1991.

[4] Laffont, J.J. *Fundamentals of Public Economics*. MIT Press, 1988.

[5] Lomelí, Héctor., Rumbos, Beatriz. *Métodos dinámicos en economía*. Thomson, 2003.

[6] Mas-Colell, Andreu., Whinston, Michael D. & Green, Jerry R. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[7] Pérez-Graza, Isabel., Minguillón, Esperanza., Jarne, Gloria. *Matemáticas para la economía*.McGraw- Hill,2001.

[8] Perloff,Jeffrey M. *Microeconomía*. Addison Wesley, 2004.

[9] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill,1976.

[10] Varian, Hal R. *Análisis Microeconómico*. Antoni Bosch editor, 1992.