



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL  
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS



**”FAMILIAS DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER  
DESDE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ESPECIAL”**

**TESIS**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE**

**LICENCIADO EN FÍSICA Y MATEMÁTICAS**

**PRESENTA**

**JESÚS GARCÍA MARTÍNEZ**

**Asesor Interno    DR. JESÚS GARCÍA RAVELO**  
**Asesor Externo    DR. JOSÉ JUAN PEÑA GIL**

Para la personita más maravillosa que la vida ha puesto en mi camino:



Olga Tapia Vilchis



# A G R A D E C I M I E N T O S

Deseo expresar mi gratitud a todas las personas que me han ayudado a lo largo de mi vida, tanto personal como académica:

A mis padres, José Luis García y María Martínez, por todo su apoyo incondicional, a mi hermano Juan Carlos.

A mis directores de tesis, Dr. Jesús García Ravelo y Dr. José Juan Peña Gil, por toda su ayuda y paciencia, sin las cuales esta tesis no hubiera sido posible.

A mis sinodales, Dr. Victor Granados García, Dr. Alfonso Queijeiro Fontana, Dr. Jaime Avendaño López, por sus valiosos comentarios.

A mis mejores amigos

♭	Maxvell Jiménez Escamilla	♪	Aldo Rodríguez Puebla
✠	Emmanuel Mijangos ( <i>Delfín</i> )	♀	Eva Martínez Palafox
♁	Osiris Salas Torres	☺	Daniel Ballesteros Chávez
Υ	Juan Segura Balcón	Υ	Fernando Morales López
✱	Leonardo Ugalde Fernández		

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. Potenciales Invariantes de Forma</b>	<b>3</b>
1.1 SUSY QM . . . . .	3
1.2 Factorización SUSY de un Hamiltoniano General . . . . .	3
1.3 Invariancia de Forma y Potenciales Solubles . . . . .	5
1.4 Mapeo entre Ecuaciones de Schrödinger . . . . .	10
<b>Capítulo 2. Ecuaciones Tipo Schrödinger a Partir de una Ecuación Diferencial Especial</b>	<b>13</b>
2.1 Transformación de Similaridad . . . . .	13
2.2 Método Alternativo . . . . .	14
<b>Capítulo 3. Aplicaciones</b>	<b>19</b>
3.1 Ecuación Hipergeométrica Confluente . . . . .	19
3.1.1 Potencial de Coulomb . . . . .	19
3.1.2 Oscilador Armónico . . . . .	22
3.1.2.1 Oscilador Armónico 1D . . . . .	23
3.1.2.2 Oscilador Armónico 3D . . . . .	25
3.1.3 Potencial de Morse . . . . .	27
3.2 Ecuación Hipergeométrica . . . . .	30
3.2.1 Potencial de Scarf II . . . . .	30
3.2.2 Potencial de Scarf I . . . . .	33
3.2.3 Potencial de Pöschl-Teller . . . . .	34
3.2.4 Potencial de Eckart . . . . .	35
3.2.5 Potencial de Rosen-Morse II . . . . .	36
3.2.6 Potencial de Rosen-Morse I . . . . .	37
3.3 Resumen de Resultados . . . . .	38
3.4 Discusión del Método . . . . .	41
<b>Capítulo 4. Otras Aplicaciones</b>	<b>43</b>
4.1 Ecuación de Schrödinger con Masa Dependiente de la Posición . . . . .	43
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Apéndice</b>	<b>46</b>
A.1 Ecuación Hipergeométrica . . . . .	46
A.2 Ecuación Hipergeométrica Confluente . . . . .	48
<b>Referencias</b>	<b>49</b>

# Introducción

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante en la Ciencia. En ocasiones, el planteamiento de un problema, da como resultado una de las ecuaciones diferenciales especiales de la física-matemática. En mecánica cuántica, algunas funciones especiales aparecen en la solución de la ecuación de Schrödinger. Por ejemplo, en la solución de la ecuación radial del átomo de hidrógeno y en la del oscilador armónico 3D, encontramos los polinomios asociados de Laguerre [8, 9].

La búsqueda de potenciales exactamente solubles, inicia desde los primeros años de la mecánica cuántica. Un potencial exactamente soluble puede ser establecido a través de diferentes puntos de vista. Algunos de los potenciales exactamente solubles para el caso no-relativista, pueden ser solucionados mediante el método de factorización, introducido por Schrödinger y perfeccionado por Infeld y Hull. Uno de los primeros potenciales resueltos con este método fue el oscilador armónico unidimensional, donde su hamiltoniano puede ser escrito en términos de dos operadores diferenciales de primer orden. Posteriormente, Natanzon muestra la forma más general de los potenciales que son exactamente solubles. En ellos la parte radial de la ecuación de Schrödinger, puede convertirse a la ecuación hipergeométrica o a la ecuación hipergeométrica confluyente. Cada caso se conoce como *Potenciales de Natanzon Hipergeométricos* y *Potenciales de Natanzon Confluente*, respectivamente [1]. Los potenciales de Natanzon se expresan por medio de seis parámetros y tanto sus eigenfunciones como sus eigenvalores están expresados sólo de manera implícita.

Por otra parte, la Mecánica Cuántica Supersimétrica (SUSY QM, por sus siglas en inglés), ha motivado el estudio de los potenciales exactamente solubles. En particular, el estudio de la *invariancia de forma* en SUSY QM, ha permitido obtener la solución exacta para los llamados *Potenciales Invariantes de Forma* [1]. De hecho, todo potencial que cumpla con la condición de invariancia de forma es exactamente soluble. Este tipo de potenciales se clasifican en dos grupos, aquellos cuyas eigenfunciones incluyen a la función hipergeométrica confluyente y a la hipergeométrica. En el primero tenemos los potenciales de Coulomb, oscilador armónico y Morse, mientras que en el segundo encontramos los potenciales de Scarf II y I, Pöschl-Teller, Rosen-Morse II y I, Eckart. Cada potencial perteneciente a uno de estos grupos, puede ser mapeado a otro del mismo grupo, mediante una transformación puntual de coordenadas. Una lista de potenciales invariantes de forma se muestra más adelante en el primer capítulo.

En este trabajo, estamos interesados en un método con el cual, es posible obtener una familia de ecuaciones tipo Schrödinger a partir de una ecuación diferencial especial. Una vez establecido el método, lo aplicamos por ejemplo, a la ecuación hipergeométrica e hipergeométrica confluyente. Al hacerlo, encontraremos potenciales consistentes a los potenciales invariantes de forma que aparecen en SUSY QM. Para cada potencial, se encuentran de manera explícita sus eigenfunciones y eigenvalores, donde las primeras quedan expresadas con la solución de la ecuación especial diferencial considerada.

En el Capítulo 1 se da una breve exposición de SUSY QM, como son la Factorización SUSY de un Hamiltoniano General y el concepto de potenciales invariantes de forma. A partir de los métodos algebraicos de SUSY QM, y a manera de ejemplo, encontramos las eigenfunciones y eigenvalores para el potencial de Morse. Además, se muestra una alternativa para conectar algunos potenciales entre si mediante una transformación canónica puntual de coordenadas [1].

El método propuesto para obtener una familia de ecuaciones tipo Schrödinger a partir de una ecuación diferencial especial, se muestra en el capítulo 2, se discuten las dificultades que pueden presentarse y finalmente algunos resultados de [2] son hallados a partir del método.

El Capítulo 3 está dedicado a las aplicaciones del método. Usando las ecuaciones hipergeométrica confluyente e hipergeométrica, surgen familias de potenciales las cuales son resueltas por el método.

El Capítulo 4 muestra una aplicación adicional, consideramos la ecuación de Schrödinger cuya masa es dependiente de la posición, ésta ha sido objeto de interés en el estudio de fenómenos como las propiedades electrónicas de semiconductores, cristales líquidos y puntos cuánticos [3,4].

Finalmente, se dan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## Potenciales Invariantes de Forma

Antes de establecer el concepto de Potenciales Invariantes de Forma, es necesario mencionar la idea de potenciales asociados supersimétricos de SUSY QM. Para ello, damos algunas definiciones y resultados de SUSY QM, tales como la definición de un sistema cuántico supersimétrico, los conceptos de potencial SUSY y de Potenciales Invariantes de Forma. Se verá que la mayoría de los potenciales exactamente solubles de la Mecánica Cuántica no-relativista pertenecen a esta clase. Además, se muestra un método [5] con el cual una ecuación de Schrödinger puede ser mapeada a otra ecuación de Schrödinger mediante una transformación canónica puntual de coordenadas.

### 1.1 SUSY QM

Supongamos un sistema cuántico con un hamiltoniano  $H$  y  $N$  operadores autoadjuntos  $Q_i = Q_i^\dagger$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ , que actúan en el espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$ .

**Definición 1.** Un sistema cuántico, el cual está caracterizado por el conjunto  $\{H, Q_i; \mathbf{H}\}$ , es llamado supersimétrico si el siguiente anticonmutador

$$\{Q_i, Q_j\} = H \delta_{ij}, \quad (1.1)$$

es válido para todo  $i, j = 1, 2, \dots, N$  donde los operadores autoadjuntos  $Q_i$  se denominan supercargas.

A partir de la Ec.(1.1), tenemos que

$$H = 2Q_1^2 = 2Q_2^2 = \dots = 2Q_N^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N Q_i^2, \quad (1.2)$$

una consecuencia de la relación anterior, es que el hamiltoniano  $H$  no tiene eigenvalores negativos.

**Definición 2.** Un sistema cuántico supersimétrico  $\{H, Q_1, \dots, Q_N; \mathbf{H}\}$ , se dice que tiene una buena SUSY si su estado base es cero,  $E_0 = 0$ . En cambio, si se tiene  $E_0 > 0$ , se dice que SUSY ha sido rota.

### 1.2 Factorización SUSY de un Hamiltoniano General

Consideremos el hamiltoniano para una partícula

$$H_1 \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x). \quad (1.3)$$

La ecuación de Schrödinger para el estado base  $\psi_0^{(1)}(x)$  es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0^{(1)}(x)}{dx^2} + V_1(x) \psi_0^{(1)}(x) = E_0^{(1)} \psi_0^{(1)}(x), \quad (1.4)$$

donde  $E_0^{(1)}$  es el eigenvalor correspondiente a la eigenfunción  $\psi_0^{(1)}(x)$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir  $E_0^{(1)} = 0$ , por lo que el potencial  $V_1(x)$  se escribe en términos de  $\psi_0^{(1)}(x)$  como

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{[\psi_0^{(1)}(x)]''}{\psi_0^{(1)}(x)}. \quad (1.5)$$

Si se definen

$$\mathcal{A} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad \mathcal{A}^\dagger = \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad (1.6)$$

con la condición

$$\mathcal{A}\psi_0^{(1)} = 0, \quad (1.7)$$

tenemos que

$$H_1\psi_0^{(1)} = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\psi_0^{(1)} = 0, \quad (1.8)$$

entonces

$$H_1 = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}, \quad (1.9)$$

de donde podemos identificar

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (1.10)$$

De la Ec.(1.7) obtenemos

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{[\psi_0^{(1)}(x)]'}{\psi_0^{(1)}(x)} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)}(x), \quad (1.11)$$

la función  $W(x)$  se denomina potencial SUSY del sistema.

A partir de la Ec.(1.11), encontramos

$$\psi_0^{(1)}(x) = \exp \left[ \int_0^x \left( -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} W(y) dy \right) \right]. \quad (1.12)$$

Usando los operadores de la Ec.(1.6), se define el hamiltoniano asociado  $H_2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger$ , con potencial  $V_2(x)$  dado por

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \quad V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \quad (1.13)$$

los potenciales  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$  son conocidos como potenciales asociados supersimétricos.

Para este caso, se definen el hamiltoniano  $H$  y los operadores  $Q$  y  $Q^\dagger$  ( $N = 1$ ), los cuales están dados por las siguientes matrices

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{A}^\dagger \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Las eigenfunciones y eigenvalores de los hamiltonianos  $H_1$  y  $H_2$  se relacionan de la siguiente manera

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \quad E_0^{(1)} = 0, \quad (1.15)$$

$$\psi_n^{(2)} = [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}\psi_{n+1}^{(1)}, \quad (1.16)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = [E_n^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} \mathcal{A}^\dagger\psi_n^{(2)}. \quad (1.17)$$

Así, una vez determinados  $\psi_n^{(1)}(x)$  y  $E_n^{(1)}$  para  $H_1$ , se encuentran los eigenfunciones y eigenvalores para  $H_2$  usando las fórmulas anteriores.



### 1.3 Invariancia de Forma y Potenciales Solubles

Si la pareja de potenciales supersimétricos,  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$ , son similares en forma, pero difieren únicamente en los parámetros que en ellos aparecen, se dice que son invariantes de forma. Es decir, si  $V_1(x)$  y  $V_2(x)$  cumplen la condición

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (1.18)$$

donde  $a_1$  es un conjunto de parámetros,  $a_2$  es una función de  $a_1$  y la función residuo  $R(a_1)$  es independiente de  $x$ , entonces se dice que  $V_{1,2}(x)$  son potenciales invariantes de forma.

Si  $a_2 = f(a_1)$  y SUSY no ha sido rota, podemos determinar las eigenfunciones y eigenvalores de  $H_1$  a partir de la condición de invariancia por medio de las siguientes fórmulas [1]

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k); \quad E_0^{(1)}(a_1) = 0, \quad (1.19)$$

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) = \mathcal{A}^\dagger(x; a_1) \mathcal{A}^\dagger(x; a_2) \cdots \mathcal{A}^\dagger(x; a_n) \psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}), \quad (1.20)$$

siendo  $a_k = f^{k-1}(a_1)$ , donde la función  $f$  es compuesta  $k-1$  veces.

Una forma más sencilla de la Ec.(1.20), es la siguiente

$$\psi_n^{(1)}(x; a_1) = \mathcal{A}^\dagger(x; a_1) \psi_{n-1}^{(1)}(x; a_2). \quad (1.21)$$

La condición de invariancia de forma, Ec.(1.18), pueden admitir dos posibilidades. Una de ellas consiste en la relación de traslación entre el conjunto de parámetros  $a_1$  y  $a_2$ ,  $a_2 = a_1 + \beta$  con  $\beta$  una constante, mientras que en la segunda, los parámetros están relacionados por escalamiento,  $a_2 = qa_1$ . La mayoría de los potenciales exactamente solubles no-relativistas son invariantes de forma.

Como ejemplo, consideremos el siguiente superpotencial [1]

$$W(x) = A - Be^{-\alpha x}, \quad (1.22)$$

con  $A$  y  $B$  parámetros dados, entonces

$$W^2(x) = A^2 - 2ABe^{-\alpha x} + B^2e^{-2\alpha x}, \quad W'(x) = B\alpha e^{-\alpha x}. \quad (1.23)$$

A partir de las Ecs.(1.10) y (1.13) encontramos, con  $\hbar = 1$ ,  $2m = 1$ , que

$$V_1(x; A, B) = A^2 + B^2e^{-2\alpha x} - B(2A + \alpha)e^{-\alpha x}, \quad (1.24)$$

$$V_2(x; A, B) = A^2 + B^2e^{-2\alpha x} - B(2A - \alpha)e^{-\alpha x}, \quad (1.25)$$

los potenciales anteriores, son conocidos como potenciales tipo Morse. De estas relaciones, encontramos que

$$V_2(x; A, B) = V_1(x; A - \alpha, B) + 2A\alpha - \alpha^2, \quad (1.26)$$

entonces, los potenciales  $V_{1,2}(x; A, B)$  son invariantes de forma según la Ec.(1.18).

En este caso el conjunto de parámetros  $a_1$ ,  $a_2$  y el residuo  $R(a_1)$  están dados por

$$a_1 = (A, B), \quad a_2 = (A - \alpha, B), \quad R(a_1) = 2A\alpha - \alpha^2. \quad (1.27)$$

El espectro del potencial  $V_1(x; A, B)$  lo determinamos con la Ec.(1.19), para lo cual observamos lo siguiente

$$a_k = A - (k - 1)\alpha, \quad (1.28)$$

$$R(a_k) = 2\alpha [A - (k - 1)\alpha] - \alpha^2, \quad (1.29)$$

por lo tanto

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k) = 2An\alpha - n\alpha(n - 1) - n\alpha^2, \quad (1.30)$$

$$= A^2 - (A - n\alpha)^2. \quad (1.31)$$

La función de onda para el estado base, se determina a partir de la Ec.(1.12)

$$\psi_0^{(1)}(x; A, B) = \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} e^{-\alpha x} - Ax \right], \quad (1.32)$$

y si hacemos el cambio de variable

$$y = \frac{2B}{\alpha} e^{-\alpha x}, \quad (1.33)$$

la Ec.(1.32) se transforma en

$$\psi_0(y; a_1) = e^{-\frac{1}{2}y} y^s, \quad (1.34)$$

donde se ha definido

$$s \equiv \frac{A}{\alpha}. \quad (1.35)$$

Para determinar las funciones de onda con  $n \geq 1$ , usamos la Ec.(1.21), con el operador  $\mathcal{A}^\dagger$  dado por

$$\mathcal{A}^\dagger = \alpha y \frac{d}{dy} - \frac{\alpha}{2} y + A, \quad (1.36)$$

entonces

$$\psi_1^{(1)}(y; a_1) = \left( \alpha y \frac{d}{dy} - \frac{\alpha}{2} y + A \right) e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-1}, \quad (1.37)$$

$$= (-\alpha y + 2A - \alpha) e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-1} \quad (1.38)$$

$$= \alpha e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-1} L_1^{2s-2}(y), \quad (1.39)$$

para lo cual, se ha empleado la relación [10]

$$L_1^k(x) = -x + k + 1. \quad (1.40)$$

Si hacemos el cálculo para  $n = 2$ , usando las fórmulas [10]

$$x \frac{dL_n^k(x)}{dx} = nL_n^k(x) - (n + k)L_{n-1}^k(x), \quad (1.41)$$

$$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k + 2)x + \frac{(k + 2)(k + 1)}{2}, \quad (1.42)$$

encontramos que

$$\psi_2^{(1)}(y; a_1) = \left( \alpha y \frac{d}{dy} - \frac{\alpha}{2} y + A \right) e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-2} L_1^{2s-4}(y), \quad (1.43)$$

$$= 2\alpha \left[ \frac{y^2}{2} - (2s-2)y + \frac{(2s-2)(2s-3)}{2} \right] e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-2}, \quad (1.44)$$

por lo tanto, si en la Ec.(1.42) hacemos  $k = 2s - 4$ , tenemos

$$\psi_2^{(1)}(y; a_1) = e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-2} L_2^{2s-4}(y). \quad (1.45)$$

Aplicando sucesivamente la Ec.(1.21), llegamos a

$$\psi_n^{(1)}(y; a_1) = e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-n} L_n^{2s-2n}(y). \quad (1.46)$$

Entonces, a partir de la condición de invariancia que satisfacen los potenciales  $V_{1,2}(x; A, B)$ , en la que se debe identificar el conjunto de parámetros  $a_{1,2}$  y al residuo  $R(a_1)$ , es posible encontrar a las eigenfunciones y eigenvalores para un potencial que es invariante de forma, mediante las Ecs.(1.19) y (1.21). Nótese que este procedimiento en general, no es complicado ya que consiste de técnicas algebraicas como ha sido ilustrado.

En la siguiente tabla mostramos una lista de potenciales invariantes de forma [1], además del superpotencial con el cual son determinados, sólo se muestra el potencial  $V_1(x; a_1)$ , el potencial  $V_2(x; a_2)$  puede calcularse con la Ec.(1.13). Para estos potenciales, los parámetros  $a_1$  y  $a_2$  están relacionados por traslación. A menos que se indique lo contrario,  $r > 0$  y  $-\infty < x < \infty$ . Se ha elegido las unidades  $\hbar = 1$ ,  $2m = 1$ .

Tabla 1.1  
Potenciales Invariantes de Forma

Potencial	$W(x)$	$V_1(x; a_1)$	$a_1$	$a_2$
Oscilador 1D	$\frac{1}{2}\omega x - b$	$\frac{1}{4}\omega^2 \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)^2 - \frac{\omega}{2}$	$\omega$	$\omega$
Oscilador 3D	$\frac{1}{2}\omega r - \frac{l+1}{r}$	$\frac{1}{4}\omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{(2l+3)\omega}{2}$	$l$	$l + 1$
Coulomb	$\frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r}$	$-\frac{e^2}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{e^4}{4(l+1)^2}$	$l$	$l + 1$
Morse	$A - Be^{-\alpha x}$	$A^2 + B^2 e^{-2\alpha x} - 2B(A + \alpha/2)e^{-\alpha x}$	$A$	$A - \alpha$
Scarf II	$A \tanh \alpha x + B \operatorname{sech} \alpha x$	$A^2 + (B^2 - A^2 - A\alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x + B(2A + \alpha) \operatorname{sech} \alpha x \tanh \alpha x$	$A$	$A - \alpha$
Scarf I	$A \tan \alpha x - B \sec \alpha x$ $-\frac{1}{2}\pi \leq \alpha x \leq \frac{1}{2}\pi$	$-A^2 + (A^2 + B^2 - A\alpha) \sec^2 \alpha x - B(2A - \alpha) \tan \alpha x \sec \alpha x$	$A$	$A + \alpha$
Pöschl-Teller	$A \coth \alpha r - B \operatorname{csch} \alpha r$ $A < B$	$A^2 + (B^2 + A^2 + A\alpha) \operatorname{csch}^2 \alpha r - B(2A + \alpha) \coth \alpha r \operatorname{csch} \alpha r$	$A$	$A - \alpha$
Eckart	$-A \coth \alpha r + B/A$ $B > A^2$	$A^2 + B^2/A^2 - 2B \coth \alpha r + A(A - \alpha) \operatorname{csch}^2 \alpha r$	$A$	$A + \alpha$
Rosen-Morse II	$A \tanh \alpha x + B/A$ $B < A^2$	$A^2 + B^2/A^2 - A(A + \alpha) \operatorname{sech}^2 \alpha x + 2B \tanh \alpha x$	$A$	$A - \alpha$
Rosen-Morse I	$-A \cot \alpha x - B/A$ $0 \leq \alpha x \leq \pi$	$A(A - \alpha) \csc^2 \alpha x + 2B \cot \alpha x - A^2 + B^2/A^2$	$A$	$A + \alpha$

Tabla 1.2  
Potenciales Invariantes de Forma (*continua*)

Potencial	$E_n^{(1)}$	$y$	$\psi_n(y)$
Oscilador 1D	$n\omega$	$\sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(x - \frac{2b}{\omega}\right)$	$e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$
Oscilador 3D	$2n\omega$	$\frac{1}{2}\omega r^2$	$e^{-\frac{1}{2}y} y^{(l+1)/2} L_n^{l+1/2}(y)$
Coulomb	$\frac{e^4}{4(l+1)^2} - \frac{e^4}{4(n+l+1)^2}$	$\frac{e^2 r}{(n+l+1)}$	$e^{-\frac{1}{2}y} y^{l+1} L_n^{2l+1}(y)$
Morse	$A^2 - (A - n\alpha)^2$	$\frac{2B}{\alpha} e^{-\alpha x}$ $s = A/\alpha$	$e^{-\frac{1}{2}y} y^{s-n} L_n^{2s-2n}(y)$
Scarf II	$A^2 - (A - n\alpha)^2$	$\sinh \alpha x$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha$	$e^{-\lambda \tan^{-1} y} (1 + y^2)^{-s/2}$ $\times P_n^{(i\lambda-s-1/2, -i\lambda-s-1/2)}(iy)$
Scarf I	$(A + n\alpha)^2 - A^2$	$\sin \alpha r$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha$	$(1 - y)^{(s-\lambda)/2} (1 + y)^{(s+\lambda)/2}$ $\times P_n^{(s-\lambda-1/2, s+\lambda-1/2)}(y)$
Pöschl-Teller	$A^2 - (A - n\alpha)^2$	$\cosh \alpha r$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha$	$(y - 1)^{(\lambda-s)/2} (y + 1)^{-(\lambda+s)/2}$ $\times P_n^{(\lambda-s-1/2, -\lambda-s-1/2)}(y)$
Eckart	$A^2 - (A + n\alpha)^2$ $-B^2/(A + n\alpha)^2$ $+B^2/A^2$	$\coth \alpha r$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha^2$ $a = \lambda/(n + s)$	$(y - 1)^{s_3/2} (y + 1)^{s_4/2}$ $\times P_n^{(s_3, s_4)}(y)$
Rosen-Morse II	$A^2 - (A - n\alpha)^2$ $-B^2/(A - n\alpha)^2$ $+B^2/A^2$	$\tanh \alpha x$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha^2$ $a = \lambda/(s - n)$	$(1 - y)^{s_1/2} (1 + y)^{s_2/2}$ $\times P_n^{(s_1, s_2)}(y)$
Rosen-Morse I	$(A + n\alpha)^2 - A^2$ $-B^2/(A + n\alpha)^2$ $+B^2/A^2$	$i \cot \alpha x$ $s = A/\alpha, \lambda = B/\alpha^2$ $a = \lambda/(s + n)$	$e^{a\alpha x} (y^2 - 1)^{-(s+n)/2}$ $\times P_n^{(-s-n+ia, -s-n-ia)}(y)$

Nótese que los cuatro primeros potenciales tienen eigenfunciones que incluyen a los polinomios de Hermite y asociados de Laguerre, que son casos particulares de la función hipergeométrica confluyente; mientras que en los restantes, los polinomios de Jacobi son un caso especial de la función hipergeométrica, para estos últimos  $s_1 = s - n + a$ ,  $s_2 = s - n - a$ ,  $s_3 = a - n - s$ ,  $s_4 = -s - n - a$ .

## 1.4 Mapeo entre Ecuaciones de Schrödinger

En esta sección, se verá como una ecuación de Schrödinger, puede transformarse a otra ecuación de Schrödinger mediante una transformación canónica puntual de coordenadas. Cuando la relación entre las coordenadas está dada de manera explícita, el nuevo potencial es invariante de forma. En la mayoría de los casos el potencial no es invariante de forma, y sus eigenfunciones y eigenvalores son conocidos implícitamente [1].

Tomemos la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + (V(x) - E_n) \right] \psi_n(x) = 0, \quad (1.47)$$

para la cual,  $\psi_n(x)$  y  $E_n$ , son conocidos para un potencial  $V(x)$  dado.

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas [1]

$$f(z) = \frac{dz}{dx}, \quad (1.48)$$

entonces, a partir de ella encontramos los operadores

$$\frac{d}{dx} = f(z) \frac{d}{dz}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = f^2(z) \frac{d^2}{dz^2} + f(z) f'(z) \frac{d}{dz}, \quad (1.49)$$

y sustituyéndolos en la Ec.(1.47) obtenemos

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{d}{dz} - \frac{V(z) - E_n}{f^2(z)} \right] \psi_n(z) = 0. \quad (1.50)$$

De la Ec.(1.48), podemos determinar  $x = x(z)$  por medio de la integral

$$x = \int^z \frac{dt}{f(t)}. \quad (1.51)$$

Con el fin de eliminar el término con primera derivada de la Ec.(1.50), se hace el siguiente cambio de variable

$$\psi_n(z) = f^{-1/2} \varphi(z), \quad (1.52)$$

por lo que la ecuación tipo Schrödinger en la nueva variable  $z$  es

$$\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - \bar{V}(z) \varphi(z) = 0, \quad (1.53)$$

donde se ha definido

$$\bar{V}(z) \equiv \frac{V(z) - E_n}{f^2(z)} - \left[ \frac{f'^2(z)}{4f^2(z)} - \frac{f''(z)}{2f(z)} \right]. \quad (1.54)$$

Con el fin de tener un espectro asociado al potencial  $\bar{V}(z)$ , en ambos miembros de la Ec.(1.53), restamos la cantidad  $\epsilon_n \varphi(z)$

$$\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - [\bar{V}(z) + \epsilon_n] \varphi(z) = -\epsilon_n \varphi(z), \quad (1.55)$$

y la solución de ésta se determina por medio de la Ec.(1.52).

Para determinar a la función  $f(z)$ , generalmente ésta se propone de manera que  $f^2(z)$  tenga la misma dependencia funcional del potencial original  $V(x)$ .

Como un ejemplo de lo descrito, tomemos  $n = 0$  en los resultados obtenidos en la sección anterior para el potencial de Morse en la variable  $x$

$$\psi_0(x) = \exp \left[ -\frac{B}{\alpha} e^{-\alpha x} - Ax \right], \quad (1.56)$$

$$V(x) = B^2 e^{-2\alpha x} - B(2A + \alpha) e^{-\alpha x} + A^2, \quad (1.57)$$

$$E_0 = 0, \quad (1.58)$$

con lo cual se satisface

$$\frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} - V(x) \psi_0(x) = 0. \quad (1.59)$$

Para que  $f^2(x)$  tenga la misma dependencia funcional de  $V(x)$ , se debe tener que

$$f^2(x) = \left( \frac{dr}{dx} \right)^2 = a e^{-2\alpha x} + b e^{-\alpha x} + c, \quad (1.60)$$

con  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes.

Por simplicidad, elegimos  $b = 1$  y  $a = c = 0$ , así

$$f = \frac{dr}{dx} = e^{-\frac{\alpha x}{2}}, \quad (1.61)$$

de la que obtenemos

$$r = -\frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha x}{2}}, \quad (1.62)$$

por lo que la transformación de la Ec.(1.48) es

$$f(r) = -\frac{\alpha}{2} r, \quad (1.63)$$

De la Ec.(1.62) se encuentra lo siguiente

$$e^{-\alpha x} = \frac{\alpha^2 r^2}{4}, \quad e^{-2\alpha x} = \frac{\alpha^4 r^4}{16}, \quad (1.64)$$

y el cambio de variable  $x = x(r)$  se determina con la Ec.(1.51)

$$x(r) = -\frac{2}{\alpha} \ln r. \quad (1.65)$$

Sustituyendo en la Ec.(1.54), encontramos que el nuevo potencial  $\bar{V}(r)$  es

$$\bar{V}(r) = \frac{\alpha^2 B^2}{4} r^2 + \frac{16A^2 - \alpha^2}{4\alpha^2 r^2} - B(2A - \alpha), \quad (1.66)$$

siendo del tipo oscilador armónico 3D.

Además, eligiendo  $\epsilon_0 = 0$  en (1.55) tenemos la ecuación

$$\frac{d^2 \varphi_0(r)}{dr^2} - \bar{V}(r) \varphi_0(r) = 0, \quad (1.67)$$

cuya solución se determina con la fórmula

$$\varphi_0(r) = f^{1/2}(r) \psi_0(x(r)). \quad (1.68)$$

Usando las Ecs.(1.56), (1.63) y (1.65) obtenemos

$$\varphi_0(r) = \exp \left[ -\frac{\alpha B}{4} r^2 \right] r^{(4A+\alpha)/2\alpha}. \quad (1.69)$$

Por conveniencia hacemos  $\alpha B = \omega$ ,  $4A = \alpha(2l + 1)$  en la Ec.(1.69)

$$\varphi_0(r) = e^{-\omega r/4} r^{l+1}. \quad (1.70)$$

Dado que conocemos a  $\varphi_0(r)$  y se eligió  $\epsilon_0 = 0$ , podemos determinar el superpotencial  $W(x)$  a partir de la Ec.(1.11) con  $\hbar = 1$ ,  $2m = 1$ , de ésta forma encontramos que

$$W(r) = \frac{1}{2}\omega r - \frac{l+1}{2}, \quad (1.71)$$

el cual corresponde al que se muestra en la tabla 1.1 para el potencial invariante de forma del oscilador armónico 3D. Una vez determinanda la pareja de potenciales supersimétricos  $V_{1,2}(r)$  con la Ec.(1.71) y la condición de invariancia que éstos cumplen, se puede encontrar las eigenfunciones y eigenvalores para el potencial  $V_1(r; a_1)$  usando los resultados de la sección 1.3.

Todos los potenciales invariantes de forma de la tabla 1.1 se relacionan por medio de una transformación canónica puntual de coordenadas. En [1] se muestra un diagrama en el cual éstos potenciales aparecen en los vértices de un polígono, entonces es posible pasar de un potencial a otro mediante la adecuada transformación puntual, por ejemplo, los potenciales de Coulomb, Oscilador 3D y Morse están en los vértices de un triángulo.



# Capítulo 2

## Ecuaciones Tipo Schrödinger a Partir de una Ecuación Diferencial Especial

En este capítulo desarrollamos la contribución esencial de esta Tesis, la cual consiste en establecer un método con el cual, puede obtenerse una familia de ecuaciones tipo Schrödinger a partir de una ecuación diferencial especial. Notaremos que en éste método es esencial la elección de cierta función  $g(x)$  arbitraria, utilizada como un factor multiplicativo que modifica la forma de la ecuación diferencial especial original. Para cada elección, el método permite obtener una familia de ecuaciones de tipo Schrödinger.

### 2.1 Transformación de Similaridad

Existen varios métodos para obtener desde una ecuación lineal homogénea de segundo orden, una ecuación del mismo orden sin el término con primera derivada. La manera más sencilla, es la que se muestra a continuación.

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y''(x) + B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0. \quad (2.1)$$

Haciendo la siguiente sustitución, conocida como *transformación de similitud* [10]

$$y(x) = e^{I(x)} z(x), \quad (2.2)$$

donde se ha definido a la función  $I(x)$  como

$$I(x) = -\frac{1}{2} \int^x B(t) dt, \quad (2.3)$$

se obtiene que

$$B(x)y'(x) = e^{I(x)} B(x) z'(x) - \frac{1}{2} e^{I(x)} B^2(x) z(x), \quad (2.4)$$

$$y''(x) = e^{I(x)} z''(x) - e^{I(x)} B(x) z'(x) + \frac{1}{4} e^{I(x)} B^2(x) z(x) - \frac{1}{2} e^{I(x)} B'(x) z(x). \quad (2.5)$$

Sustituyendo en la Ec.(2.1) y simplificando, se llega a una ecuación sin el término con primera derivada

$$\frac{d^2 z(x)}{dx^2} - \left[ \frac{1}{4} B^2(x) + \frac{1}{2} B'(x) - C(x) \right] z(x) = 0. \quad (2.6)$$

Nótese que la solución de esta ecuación puede determinarse a partir de la Ec.(2.2) si  $y(x)$  es conocida. En este trabajo, se entenderá por una ecuación tipo Schrödinger, aquella ecuación diferencial del estilo de la Ec.(2.6).

Como se ha visto, mediante la transformación de similaridad (2.2), es posible obtener una ecuación diferencial de segundo orden sin el término con primera derivada a partir de una ecuación del tipo (2.1). Lo anterior, es consistente con el cambio de variable de la Ec.(1.52). Al comparar las Ecs.(1.50) y (2.1), tenemos que

$$B(x) \rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad C(x) \rightarrow -\frac{V(z) - E_n}{f^2(z)}, \quad (2.7)$$

entonces, por las Ecs.(2.2)-(2.3)

$$\psi_n(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int^z \frac{f'(t) dt}{f(t)} \right] \varphi(z) \quad (2.8)$$

$$= f^{-1/2}(z) \varphi(z), \quad (2.9)$$

y por la Ec.(2.6), tenemos que

$$\frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - \left[ \frac{V(z) - E_n}{f^2(z)} + \frac{f''(z)}{2f(z)} - \frac{f'^2(z)}{4f^2(z)} \right] \varphi(z) = 0. \quad (2.10)$$

Podemos ver que, el cambio de variable dado en la Ec.(1.52), no es más que una transformación de similaridad, la cual permite eliminar el término con primera derivada en la Ec.(1.50), para obtener una ecuación tipo Schrödinger dada por la Ec.(2.10).

## 2.2 Método Alternativo

En la sección anterior, mostramos la manera de eliminar el término con primera derivada de una ecuación diferencial de segundo orden, mediante una transformación de similaridad. Ahora veremos como éste resultado puede ser usado en el método que proponemos.

Dada la forma que tienen las ecuaciones especiales, consideremos la ecuación diferencial

$$P(x) y''(x) + Q(x) y'(x) + R(x) y(x) = 0, \quad (2.11)$$

donde las funciones  $P(x)$ ,  $Q(x)$ ,  $R(x)$  y sus soluciones son conocidas de antemano en un cierto intervalo  $[a, b]$ . Multiplicando ésta ecuación por una función  $g(x)$  completamente arbitraria, tenemos que

$$\hat{L}[y(x)] = 0, \quad (2.12)$$

donde

$$\hat{L} = g(x) P(x) \frac{d^2}{dx^2} + g(x) Q(x) \frac{d}{dx} + g(x) R(x). \quad (2.13)$$

Si se hace el cambio de variable

$$x = F(u), \quad (2.14)$$

donde  $F(u)$  será convenientemente elegida más adelante, obtenemos

$$g(x) Q(x) \frac{d}{dx} = g(F(u)) Q(F(u)) \frac{1}{F'(u)} \frac{d}{du}, \quad (2.15)$$

$$g(x) P(x) \frac{d^2}{dx^2} = g(F(u)) P(F(u)) \left( \frac{1}{[F'(u)]^2} \frac{d^2}{du^2} - \frac{F''(u)}{[F'(u)]^3} \frac{d}{du} \right). \quad (2.16)$$

Con el fin de simplificar la expresión (2.16), se impone la siguiente condición

$$g(F(u)) P(F(u)) = [F'(u)]^2, \quad (2.17)$$

así, la Ec.(2.16) se transforma en

$$g(x) P(x) \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{du^2} - \frac{F''(u)}{F'(u)} \frac{d}{du}. \quad (2.18)$$

Por lo que el operador de la Ec.(2.13) se escribe en la variable  $u$  como

$$\hat{L} = \frac{d^2}{du^2} + 2W(u) \frac{d}{du} + g(F(u)) R(F(u)), \quad (2.19)$$

siendo

$$2W(u) = \frac{g(F(u)) Q(F(u)) - F''(u)}{F'(u)}. \quad (2.20)$$

Escribimos a la Ec.(2.12) en la variable  $u$  con ayuda de la Ec.(2.19) como

$$\frac{d^2 y(F(u))}{du^2} + 2W(u) \frac{dy(F(u))}{du} + g(F(u)) R(F(u)) y(F(u)) = 0, \quad (2.21)$$

obsérvese que la condición impuesta (2.17), permitió expresar a esta ecuación en la forma de la Ec.(2.1).

Por otra parte, para determinar el cambio de variable propuesto,  $x = F(u)$ , se integra la condición (2.17), de la que se obtiene directamente

$$u = \pm \int^x \frac{dt}{\sqrt{g(t) P(t)}} = f_{\pm}(x), \quad (2.22)$$

donde el subíndice de  $f(x)$  denota la elección del signo que se haga en la integral.

A partir de la Ec.(2.22), es posible determinar el rango de la variable  $u$  y si la función  $u = f_{\pm}(x)$  tiene inversa, obtenemos el cambio de variable dado en la Ec.(2.14).

Finalmente, consideremos una transformación de similitud como la descrita en la Ec.(2.2)

$$y(F(u)) = e^{I(u)} \psi(u), \quad (2.23)$$

donde

$$I(u) = - \int^u W(t) dt, \quad (2.24)$$

de tal forma que, en la Ec.(2.6) se identifica

$$x \rightarrow u, \quad (2.25)$$

$$z \rightarrow \psi, \quad (2.26)$$

$$B(x) \rightarrow 2W(u), \quad (2.27)$$

$$C(x) \rightarrow g(F(u)) R(F(u)), \quad (2.28)$$

por lo tanto

$$\frac{d^2 \psi(u)}{du^2} - [W^2(u) + W'(u) - g(F(u)) R(F(u))] \psi(u) = 0. \quad (2.29)$$

La ecuación anterior es considerada como una ecuación tipo Schrödinger con solución

$$\psi(u) = e^{-I(u)} y(F(u)). \quad (2.30)$$

Puesto que el término

$$W^2(u) + W'(u) - g(F(u))R(F(u)), \quad (2.31)$$

de la Ec.(2.29) puede depender de un conjunto de parámetros  $a_j$ , proponemos que su elección garantice que la solución  $\psi(u)$  de la Ec.(2.29) sea cuadrado integrable. Bajo ésta circunstancia surgen dos posibles casos respecto a la forma del término (2.31), a saber,

$$i) \quad V(u; a_i) - E(a_j), \quad (2.32)$$

$$ii) \quad V(u; a_i). \quad (2.33)$$

En el caso  $i$ ), la ecuación (2.29) adquiere la forma

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - V(u, a_i) \psi(u) = -E(a_j) \psi(u), \quad (2.34)$$

de la cual es posible eventualmente, obtener potenciales físicamente admisibles para los cuales  $i \neq j$ . Éstas situaciones serán mostradas con detalle en las aplicaciones.

En este trabajo estamos interesados, en construir ecuaciones de Schrödinger, lo cual como veremos, depende fuertemente de la elección de la función  $g(x)$ . Y para elegir a ésta consideramos básicamente la dificultad en resolver la integral

$$\int^x \frac{dt}{\sqrt{g(t)P(t)}}, \quad (2.35)$$

que permite determinar el cambio de variable  $x = F(u)$ .

Observemos que la función arbitraria  $g(x)$  introducida en la Ec.(2.13)

$$\hat{L} = g(x) P(x) \frac{d^2}{dx^2} + g(x) Q(x) \frac{d}{dx} + g(x) R(x), \quad (2.36)$$

modificará el potencial  $V(u)$ , por ejemplo, a través de la Ec.(2.20)

$$2W(u) = \frac{g(F(u)) Q(F(u)) - F''(u)}{F'(u)}, \quad (2.37)$$

y esto permite generar un conjunto de ecuaciones tipo Schrödinger a partir de la ecuación diferencial especial conocida (Ec.(2.11)).

En resumen, para cada  $g(x)$  seleccionada, tendremos una ecuación de Schrödinger diferente

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - [W^2(u) + W'(u) - g(F(u)) R(F(u))] \psi(u) = 0, \quad (2.38)$$

y su correspondiente solución

$$\psi(u) = e^{-I(u)} y(F(u)), \quad (2.39)$$

donde  $y(x)$  es solución de la Ec.(2.1)

$$P(x) y'' + Q(x) y' + R(x) y(x) = 0. \quad (2.40)$$

En este punto, es importante mencionar que el método que se plantea en este trabajo, reproduce como caso particular a aquel propuesto por *G. Krylov* y *R. Robnik* [2], quien propone una transformación canónica puntual de coordenadas para obtener potenciales solubles de una ecuación tipo Schrödinger obtenida a partir de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales de orden no mayor que 2. En efecto, si escribimos a la Ec.(2.17) como

$$F'(u) = \sqrt{g(F(u))P(F(u))}, \quad (2.41)$$

de la que obtenemos

$$F''(u) = \frac{1}{2} [g(F(u))P'(F(u)) + g'(F(u))P(F(u))], \quad (2.42)$$

donde el símbolo ' denota derivada respecto al argumento de la función.

Sustituyendo las Ecs.(2.41) y (2.42) en la Ec.(2.20) encontramos que

$$W(u) = \frac{\sqrt{g} Q}{2\sqrt{P}} - \frac{\sqrt{g} P'}{4\sqrt{P}} - \frac{\sqrt{P} g'}{4\sqrt{g}}, \quad (2.43)$$

donde se sobreentenderá que el argumento de las funciones  $g$ ,  $P$  y  $Q$  es  $F(u)$ .

A partir de la ecuación anterior encontramos

$$W^2(u) = \frac{g [4Q^2 - 4P' Q + (P')^2]}{16P} + \frac{g'(P' - 2Q)}{8} + \frac{(g')^2 P}{16g}, \quad (2.44)$$

$$W'(u) = \frac{g(2Q' - P'')}{4} + \frac{g'(Q - P')}{4} - \frac{g''P}{4} + \frac{gP'(P' - 2Q)}{8P} + \frac{(g')^2 P}{8g}, \quad (2.45)$$

en donde hemos usado el hecho de que

$$\frac{d}{du} \frac{\sqrt{A} B}{\sqrt{C}} = \sqrt{gP} \left[ \frac{\sqrt{A} B'}{\sqrt{C}} + \frac{A'B}{2\sqrt{AC}} - \frac{\sqrt{A} B C'}{2\sqrt{C^3}} \right], \quad (2.46)$$

siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  funciones de  $F(u)$ .

Si se propone

$$g(F(u)) = \frac{1}{[\omega(u)]^2}, \quad (2.47)$$

tenemos que

$$g' = -\frac{2\omega'}{\omega^2\sqrt{P}}, \quad g'' = \frac{1}{P} \left[ \frac{-2\omega''}{\omega} + \frac{4(\omega')^2}{\omega^2} \right] + \frac{\omega' P'}{\omega^2\sqrt{P^3}}, \quad (2.48)$$

con lo cual, las Ecs.(2.43)-(2.45) se transforman en

$$W(u) = \frac{1}{2\omega} \left( \frac{2Q - P'}{2\sqrt{P}} + \omega' \right), \quad (2.49)$$

$$W^2(u) = \frac{1}{4\omega^2} \left[ \frac{4Q^2 - 4P'Q + (P')^2}{4P} + \frac{\omega'(2Q - P')}{\sqrt{P}} + (\omega')^2 \right], \quad (2.50)$$

$$W'(u) = \frac{1}{4\omega^2} \left[ -\frac{\omega'(2Q - P')}{\sqrt{P}} - \frac{2P'Q - (P')^2}{2P} + 2Q' - P'' - 2(\omega')^2 + 2\omega\omega'' \right]. \quad (2.51)$$

Al sumar las Ecs.(2.50) y (2.51) obtenemos

$$W^2(u) + W'(u) = \frac{1}{\omega^2} \left[ \frac{4Q^2 - 8P'Q + 3(P')^2}{16P} + \frac{Q'}{2} - \frac{P''}{4} - \frac{(\omega')^2}{4} + \frac{\omega\omega''}{2} \right], \quad (2.52)$$

logrando que la Ec.(2.29) con  $R(x) = \varepsilon$ , se escriba como

$$\omega^2\psi''(u) + \left[ -\frac{Q^2}{4P} + \frac{P'Q}{2P} - \frac{3(P')^2}{16P} + \frac{(\omega')^2}{4} + \frac{P''}{4} - \frac{Q'}{2} - \frac{\omega\omega''}{2} + \varepsilon \right] \psi(u) = 0, \quad (2.53)$$

el cual es el resultado obtenido en [2].

Más aún, considerando  $\omega(u) = 1$  (lo cual equivale a  $g(x) = 1$  en esta tesis) y  $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ,  $Q(x) = b_1x + b_0$ , la Ec.(2.53) se transforma en

$$\psi''(u) - \tilde{V}(u)\psi(u) = 0, \quad (2.54)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{V}(u) = & \frac{b_1 - a_2 - 2\varepsilon}{2} + \frac{(b_1F(u) + b_0)^2}{4(a_2F^2(u) + a_1F(u) + a_0)} - \frac{(2a_2F(u) + a_1)(b_1F(u) + b_0)}{2(a_2F^2(u) + a_1F(u) + a_0)} \\ & + \frac{3(2a_2F(u) + a_1)^2}{16(a_2F^2(u) + a_1F(u) + a_0)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

El cambio de variable  $x = F(u)$  está dado por los siguientes casos [2]

$$x = F(u) = \begin{cases} \frac{a_1 \sinh(\sqrt{a_2}u/2) + \sqrt{a_0a_2} \sinh(\sqrt{a_2}u)}{a_2}, & a_2 \neq 0, \quad D \neq 0, \\ \frac{-a_1 + (a_1 + 2a_2) \exp(\sqrt{a_2}u)}{2a_2}, & a_2 \neq 0, \quad D = 0, \\ \sqrt{a_0}u + \frac{a_1u^2}{4}, & a_2 = 0, \quad a_1 \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{a_0}}u, & a_2 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_0 \neq 0, \end{cases} \quad (2.56)$$

con  $D = a_1^2 - 4a_0a_2$ .

El potencial  $\tilde{V}(u)$  tomará una forma determinada si se sustituye alguna de las relaciones anteriores en la Ec.(2.55), por ejemplo, si elegimos el caso donde  $a_2 \neq 0$  y  $D = 0$ , renombrando a los parámetros  $a_i$  como  $a_0 = \alpha^2$ ,  $a_1 = 2\alpha\beta$  y  $a_2 = \beta^2$ , obtenemos el siguiente potencial tipo Morse [2]

$$\tilde{V}(u) = A + Be^{-\beta u} + Ce^{-2\beta u}, \quad (2.57)$$

donde se han definido a los parámetros  $A$ ,  $B$  y  $C$  como

$$A = \frac{(\beta^2 - b_1)^2}{4\beta^2}, \quad B = -\frac{(b_1\alpha - b_0\beta)(b_1 - 2\beta^2)}{2\alpha\beta^2}, \quad C = \frac{(\alpha b_1 - \beta b_0)^2}{4\alpha^2\beta^2}. \quad (2.58)$$

# Capítulo 3

## Aplicaciones

Con el propósito de encontrar familias de potenciales cuánticos solubles, asociados a una ecuación de Schrödinger, aplicaremos el método descrito en el capítulo anterior a la ecuación hipergeométrica confluyente y a la ecuación hipergeométrica. Se trabaja con éstas ecuaciones, debido a que algunas funciones especiales son casos particulares de la función hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(a; c; x)$  o de la función hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ .<sup>1</sup>

### 3.1 Ecuación Hipergeométrica Confluyente

La ecuación hipergeométrica confluyente es [10, 13]

$$x y''(x) + (c - x) y'(x) - a y(x) = 0, \quad (3.1)$$

cuyas soluciones son

$$y_1(x) = {}_1F_1(a; c; x), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (3.2)$$

$$y_2(x) = x^{1-c} {}_1F_1(a + 1 - c; 2 - c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots, \quad (3.3)$$

donde la función hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(a; c; x)$ , está dada por

$${}_1F_1(a; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(c)_m m!}, \quad (3.4)$$

y  $(a)_m$  es el símbolo de Pochhammer definido como [10]

$$(a)_m = a(a + 1)(a + 2) \cdots (a + m - 1), \quad (a)_0 \equiv 1. \quad (3.5)$$

Al aplicar el método descrito en el capítulo anterior a la ecuación hipergeométrica confluyente Ec.(3.1), debemos identificar, de acuerdo con la Ec.(2.11)

$$P(x) = x, \quad Q(x) = c - x, \quad R(x) = -a. \quad (3.6)$$

A continuación, se proponen algunas funciones  $g(x)$  y se obtiene una familia de ecuaciones tipo Schrödinger, para cada una de las funciones  $g(x)$  utilizadas, así como su correspondiente solución.

#### 3.1.1 Potencial de Coulomb

Cuando

$$g(x) = k^2 x^{-1}, \quad k > 0, \quad x \neq 0, \quad (3.7)$$

obtenemos a partir de la Ec.(2.22) que

$$u = \pm k^{-1} x. \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>En el apéndice se incluyen algunas de sus propiedades.

De donde en general el dominio para  $u$  y  $x$  es

$$-\infty < x, u < \infty. \quad (3.9)$$

Considerando el signo positivo y  $x > 0$  en la Ec.(3.8), tenemos que

$$u > 0. \quad (3.10)$$

De la Ec.(3.8) determinamos el cambio de variable

$$x = F(u) = ku, \quad (3.11)$$

el cual, al sustituirlo en las Ecs.(2.20) y (2.29), obtenemos

$$W(u) = \frac{c}{2u} - \frac{k}{2}, \quad (3.12)$$

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - \left[ \frac{k(2a-c)}{2u} + \frac{c(c-2)}{4u^2} + \frac{k^2}{4} \right] \psi(u) = 0. \quad (3.13)$$

Observando el factor dentro del paréntesis rectangular de  $\psi(u)$ , tenemos la situación descrita por la Ec.(2.32), de donde es posible identificar la familia de potenciales tipo Coulomb con su correspondiente energía

$$V(u, a, c, k) = \frac{k(2a-c)}{2u} + \frac{c(c-2)}{4u^2}, \quad (3.14)$$

$$E(k) = -\frac{k^2}{4}. \quad (3.15)$$

Las soluciones de la Ec.(3.13), se determinan a partir de las Ecs.(2.24) y (2.30)

$$\psi_i(u) = e^{-I(u)} u^{c/2} y_i(F(u)), \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

con  $y_i(x)$  solución de la Ec.(3.1), es decir, usando las Ecs.(3.2), (3.3) y (3.16) obtenemos

$$\psi_1(u) = e^{-ku/2} u^{c/2} {}_1F_1(a; c; ku), \quad (3.17)$$

$$\psi_2(u) = e^{-ku/2} u^{(2-c)/2} {}_1F_1(a+1-c; 2-c; ku). \quad (3.18)$$

De esta forma, hemos encontrado una familia de potenciales dada por

$$V(u, a, c, k) = \frac{k(2a-c)}{2u} + \frac{c(c-2)}{4u^2}, \quad (3.19)$$

de la que, para una elección apropiada de los parámetros  $a$ ,  $c$  y  $k$ , podemos particularizarlo al potencial *efectivo* para el átomo de hidrógeno en tres dimensiones [8, 9]

$$V_{ef}(r) = -\frac{1}{r} + \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (3.20)$$

Para ello, debemos elegir  $c$  de tal forma que

$$c(c-2) = 4l(l+1), \quad (3.21)$$

con

$$l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Resolviendo la Ec.(3.21) para  $c$ , obtenemos

$$c_1 = 2(l+1), \quad c_2 = -2l, \quad (3.23)$$

notando que para cada solución  $\psi_i(u)$  ( $i = 1, 2$ ), sólo es válido el correspondiente valor de  $c_i$ .



Por otro lado, los parámetros  $a$  y  $k$  se determinan a partir de las siguientes condiciones

1. Si  $\frac{k(2a-c)}{2} = -1$  entonces  $V(u) = -\frac{1}{u} + \frac{l(l+1)}{u^2}$ ,
2.  $a \in Z^- \cup \{0\}$ .

Con la segunda condición conseguimos que la serie infinita de la Ec.(3.4), se trunque para  $m \geq |a| + 1$ , con lo cual conseguimos que la solución  $\psi_1(u)$  sea cuadrado integrable en el intervalo  $[0, \infty)$ .

*Caso*  $c_1 = 2(l + 1)$ .

Para este valor de  $c$ , la solución permitada es

$$\psi_1(u) = e^{-ku/2} u^{c_1/2} {}_1F_1(a; c_1; x). \quad (3.24)$$

Sustituyendo  $c_1$  en la primera de las condiciones, encontramos que

$$k(a - l - 1) = -1, \quad (3.25)$$

mientras que de la segunda llegamos a<sup>2</sup>

$$k = \frac{-1}{-(|a| + l + 1)} \equiv \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (3.26)$$

de lo que se desprende

$$a = l + 1 - n \leq 0, \quad (3.27)$$

o consistentemente

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.28)$$

Entonces

$${}_1F_1(a; c; x) = {}_1F_1(l + 1 - n; 2l + 2; u/n) \propto L_{n-l-1}^{2l+1}(u/n), \quad (3.29)$$

donde se ha empleado la relación entre la función hipergeométrica confluyente y los polinomios asociados de Laguerre [10]

$$L_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!} {}_1F_1(-n; m+1; x). \quad (3.30)$$

Al sustituir los valores encontrados de los parámetros  $a$ ,  $c$  y  $k$  en las Ecs.(3.24), (3.14) y (3.15), respectivamente, encontramos que

$$\psi_1(u) = e^{-u/2n} u^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1}(u/n), \quad (3.31)$$

$$V(u) = -\frac{1}{u} + \frac{l(l+1)}{u^2}, \quad (3.32)$$

$$E = -\frac{1}{4n^2}, \quad (3.33)$$

estos resultados sastisfacen la ecuación

$$\frac{d^2\psi_1(u)}{du^2} - V(u)\psi_1(u) = -E\psi_1(u), \quad (3.34)$$

---

<sup>2</sup>Dado que  $a \in Z^- \cup \{0\}$ ,  $a = -|a|$ .

la cual es la ecuación para la parte radial del átomo de hidrógeno en la variable  $u$ .

Observamos que la elección de  $a$ ,  $c$  y  $k$ , nos conduce a la situación descrita por la Ec.(2.32).

*Caso*  $c = -2l$ .

En este caso, la solución admisible es

$$\psi_2(u) = e^{-ku/2} u^{(2-c_2)/2} {}_1F_1(a+1-c_2; 2-c_2; ku), \quad (3.35)$$

y procediendo de manera análoga para determinar los parámetros  $a$ ,  $c$  y  $k$ , encontramos que<sup>3</sup>

$$a = -n - l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad k = \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}. \quad (3.36)$$

Sustituyendo los valores anteriores en las Ecs.(3.14), (3.15) y (3.35), se obtienen los mismos resultados que en el caso anterior.

### 3.1.2 Oscilador Armónico

Si elegimos

$$g(x) = k^2, \quad k > 0, \quad (3.37)$$

encontramos a partir de la Ec.(2.22), tomando  $x > 0$ , que

$$u = \pm \frac{2\sqrt{x}}{k}, \quad (3.38)$$

de donde, determinamos el cambio de variable  $x = F(u)$  con

$$F(u) = \frac{k^2 u^2}{4}. \quad (3.39)$$

De las Ecs.(2.20) y (2.29) obtenemos, respectivamente

$$W(u) = -\frac{k^2 u}{4} + \frac{2c-1}{2u}, \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - \left[ \frac{k^4 u^2}{16} + \frac{(2c-1)(2c-3)}{4u^2} + \frac{k^2(2a-c)}{2} \right] \psi(u) = 0. \quad (3.41)$$

De aquí, podemos identificar una familia de potenciales tipo oscilador armónico, con su correspondiente energía

$$V(u, c, k) = \frac{k^4 u^2}{16} + \frac{(2c-1)(2c-3)}{4u^2}, \quad (3.42)$$

$$E(a, c, k) = -\frac{k^2(2a-c)}{2}. \quad (3.43)$$

Las soluciones de la Ec.(3.41) se determinan a partir de las Ecs.(2.24) y (2.30)

$$\psi_i(u) = e^{-k^2 u^2/8} |u|^{(2c-1)/2} y_i(F(u)), \quad i = 1, 2. \quad (3.44)$$

con  $y_i(x)$ ,  $i = 1, 2$  soluciones de la ecuación hipergeométrica confluyente, Ec.(3.1).

---

<sup>3</sup>En este caso la condición es  $a+1-c \in \mathbf{Z}^- \cup \{0\}$ .

Entonces

$$\psi_1(u) = e^{-k^2 u^2/8} |u|^{(2c-1)/2} {}_1F_1(a; c; k^2 u^2/4), \quad (3.45)$$

$$\psi_2(u) = e^{-k^2 u^2/8} |u|^{(3-2c)/2} {}_1F_1(a+1-c; 2-c; k^2 u^2/4). \quad (3.46)$$

Los resultados anteriores satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2\psi_i(u)}{du^2} - V(u, c, k) \psi_i(u) = -E(a, c, k) \psi_i(u), \quad i = 1, 2, \quad (3.47)$$

y son válidos para  $-\infty < u < \infty$ . Observemos que la ecuación anterior, en general, tiene la forma del caso expresado en la Ec.(2.32). Nuestro interés será buscar una elección de parámetros que permita expresar al potencial de la Ec.(3.42) sin los parámetros que determinan el valor de la energía.

### 3.1.2.1 Oscilador Armónico 1D

Con el propósito de eliminar el término con  $1/u^2$  en la Ec.(3.42), es conveniente elegir a los parámetros como

$$k^2 = 2, \quad c = 1/2, 3/2 \quad (3.48)$$

consiguiendo que

$$V(u) = \frac{1}{4} u^2, \quad (3.49)$$

el cual es el potencial para el oscilador armónico unidimensional [8].

Analicemos cada valor de  $c$  por separado.

*Caso  $c = \frac{1}{2}$ .*

Sustituyendo este valor en las Ecs.(3.45), (3.46) y (3.43), encontramos, respectivamente que

$$\psi_1(u) = e^{-u^2/4} {}_1F_1\left(a_1; \frac{1}{2}; \frac{u^2}{2}\right), \quad (3.50)$$

$$\psi_2(u) = e^{-u^2/4} u {}_1F_1\left(a_2 + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{u^2}{2}\right), \quad (3.51)$$

$$E_i = -2a_i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (3.52)$$

donde por conveniencia, se ha etiquetado al parámetro  $a$  con el subíndice  $i$  para indicar a que solución  $\psi_i(u)$  y espectro  $E_i$  corresponde.

Los resultados anteriores cumplen la relación

$$\frac{d^2\psi_i(u)}{du^2} - \frac{1}{4} u^2 \psi_i(u) = -E_i \psi_i(u). \quad (3.53)$$

Dado que la función hipergeométrica confluyente, cuando  $a \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$  es tal que  ${}_1F_1(a; c; x)$  es un polinomio de grado  $|a|$ , elegimos

$$a_1 = -n, \quad a_2 = -n - \frac{1}{2}, \quad (3.54)$$

con  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Al igual que en el potencial de Coulomb, con los valores anteriores de  $a_i$ , conseguimos que cada serie infinita de la Ec.(3.4) se trunque para  $m \geq |a| + 1$ , lo cual permite que  $\psi_i(u)$ ,  $i = 1, 2$ , sea cuadrado integrable en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

Sustituyendo  $a_1$  y  $a_2$  en las Ecs.(3.50)-(3.52) tenemos que

$$\psi_1(u) = e^{-u^2/4} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; \frac{u^2}{2}\right), \quad (3.55)$$

$$E_1 = 2n + \frac{1}{2}, \quad (3.56)$$

$$\psi_2(u) = e^{-u^2/4} u {}_1F_1\left(-n; \frac{3}{2}; \frac{u^2}{2}\right), \quad (3.57)$$

$$E_2 = 2n + \frac{3}{2}. \quad (3.58)$$

Así, por la forma de  $a_i$ , cada función hipergeométrica confluyente que es parte de las soluciones  $\psi_i(u)$ , son polinomios de grado  $n$ .

Aplicando las siguientes relaciones entre los polinomios de Hermite y la función hipergeométrica confluyente [10]

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; x^2\right), \quad (3.59)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1\left(-n; \frac{3}{2}; x^2\right), \quad (3.60)$$

a las Ecs.(3.55) y (3.57) obtenemos

$$\psi_1(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_{2n}(\xi), \quad (3.61)$$

$$E_1 = (2n) + \frac{1}{2}, \quad (3.62)$$

$$\psi_2(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_{2n+1}(\xi), \quad (3.63)$$

$$E_2 = (2n + 1) + \frac{1}{2}, \quad (3.64)$$

donde se ha definido

$$\xi = \frac{u}{\sqrt{2}}. \quad (3.65)$$

De los resultados anteriores, concluimos que

$$\psi(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (3.66)$$

$$E = n + \frac{1}{2}, \quad (3.67)$$

$$\frac{d}{du} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{d\xi}, \quad (3.68)$$

por lo que, la ecuación de Schrödinger en la variable  $\xi$ , es

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2 \psi(\xi) = -(2n + 1)\psi(\xi). \quad (3.69)$$

Caso  $c = \frac{3}{2}$ .

Con este valor de  $c$ , y siguiendo el tratamiento del caso anterior, encontramos que los valores de  $a_1$  y  $a_2$  deben ser

$$a_1 = -n, \quad a_2 = -n + \frac{1}{2}, \quad (3.70)$$

de tal forma que, al sustituir estos valores en las soluciones  $\psi_i(u)$  (Ecs.(3.45) y (3.46)), obtenemos los mismos resultados de las Ecs.(3.55)-(3.58).

### 3.1.2.2 Oscilador Armónico 3D

Si en las Ecs.(3.42) y (3.43) hacemos  $k^2 = 2$ , tenemos que

$$V(u, c) = \frac{1}{4}u^2 + \frac{(2c-1)(2c-3)}{4u^2}, \quad (3.71)$$

$$E(a, c) = c - 2a, \quad (3.72)$$

y en este caso, consideraremos  $u > 0$ .

Ahora deseamos obtener el potencial *efectivo* para el oscilador armónico 3-D [9]

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{4}r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (3.73)$$

a partir de la familia de potenciales dada en la Ec.(3.71), para lo cual debemos elegir  $c$  de tal forma que

$$(2c-1)(2c-3) = 4l(l+1). \quad (3.74)$$

Los valores de  $c$  que satisfacen la relación anterior son

$$c_1 = \frac{2l+3}{2}, \quad c_2 = \frac{1-2l}{2}, \quad (3.75)$$

por lo que las Ecs.(3.71) y (3.72) se transforman en

$$V(u) = \frac{1}{4}u^2 + \frac{l(l+1)}{4u^2}, \quad (3.76)$$

$$E(a, c_i) = c_i - 2a, \quad i = 1, 2. \quad (3.77)$$

A continuación, se consideran por separado los valores de  $c$  en las Ecs.(3.45), (3.46) y (3.77).

Caso  $c = \frac{2l+3}{2}$ .

$$\psi_1(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1 \left( a_1; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.78)$$

$$\psi_2(u) = e^{-u^2/4} u^{-l} {}_1F_1 \left( a_2 - \frac{2l+1}{2}; \frac{1-2l}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.79)$$

$$E_i = \frac{2l+3}{2} - 2a_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.80)$$

Caso  $c = \frac{1-2l}{2}$ .

$$\psi_1(u) = e^{-u^2/4} u^{-l} {}_1F_1 \left( a_1; \frac{1-2l}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.81)$$

$$\psi_2(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1 \left( a_2 + \frac{2l+1}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.82)$$

$$E_i = \frac{1-2l}{2} - 2a_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.83)$$

Como  $l \geq 0$ , las soluciones con el factor  $u^{-l}$  se descartan, pues son divergentes cuando  $u \rightarrow 0$ . Entonces, sólo consideraremos las siguientes soluciones con su respectivo espectro  $E_i$

$$\psi_1(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1 \left( a_1; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.84)$$

$$E_1 = \frac{2l+3}{2} - 2a_1, \quad (3.85)$$

$$\psi_2(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1 \left( a_2 + \frac{2l+1}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.86)$$

$$E_2 = \frac{1-2l}{2} - 2a_2. \quad (3.87)$$

Notemos que cada espectro  $E_i$ , depende explícitamente del número cuántico azimutal  $l$ , por lo que la elección de cada parámetro  $a_i$  esta basada en las siguientes condiciones

1.  $E_i = E_i(n)$ ,
2.  $a_1$  y  $a_2 + \frac{2l+1}{2} \in Z^- \cup \{0\}$ .

Con la primera condición, busquemos la forma del parámetro  $a_i$  que elimine la dependencia de  $l$  en el espectro  $E_i$  e introduzca la dependencia del número cuántico principal  $n$ , mientras que con la segunda, conseguimos que cada función hipergeométrica confluyente sea un polinomio.

Los valores de  $a_1$  y  $a_2$  que satisfacen las condiciones anteriores son

$$a_1 = \frac{l-n}{2}, \quad a_2 = -\frac{n+l+1}{2}. \quad (3.88)$$

Con estos valores, las Ecs.(3.84)-(3.87) se transforman en

$$\psi(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1 \left( \frac{l-n}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.89)$$

$$E = n + \frac{3}{2}, \quad (3.90)$$

respectivamente, es decir, ambos valores de  $a_i$  producen la misma solución  $\psi(u)$  y espectro  $E$ .

En relación a la Ec.(3.89), para que la función hipergeométrica confluyente

$${}_1F_1 \left( \frac{l-n}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2} \right), \quad (3.91)$$

sea un polinomio para todo  $n$ , el número cuántico azimutal  $l$  debe cumplir lo siguiente

- Si  $n$  es par, entonces  $l = 0, 2, 4, \dots, n$ ,
- Si  $n$  es impar, entonces  $l = 1, 3, 5, \dots, n$ .

Las restricciones anteriores garantizan que  $\frac{l-n}{2} \in Z^- \cup \{0\}$ , de tal forma que

$$\psi(u) = e^{-u^2/4} u^{l+1} {}_1F_1\left(\frac{l-n}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2}\right), \quad (3.92)$$

$$V(u) = \frac{1}{4}u^2 + \frac{l(l+1)}{u^2}, \quad (3.93)$$

$$E = n + \frac{3}{2}, \quad (3.94)$$

satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - V(u)\psi(u) = -E\psi(u), \quad u > 0. \quad (3.95)$$

### 3.1.3 Potencial de Morse

Como un ejemplo más de potenciales solubles que se pueden derivar de la ecuación hipergeométrica confluyente, tenemos el potencial de Morse, para el cual debemos considerar

$$g(x) = k^2 x, \quad k, x > 0. \quad (3.96)$$

De la Ec.(2.22) obtenemos, tomando el signo menos

$$u = -\frac{1}{k} \ln x, \quad (3.97)$$

entonces

$$F(u) = e^{-ku}. \quad (3.98)$$

La elección del signo menos en la Ec.(2.22), permite que  $F(u) \rightarrow 0$  cuando  $u \rightarrow \infty$ , por lo que nos restringimos al caso  $u > 0$ .

A partir de las Ecs.(2.20) y (2.29) encontramos, respectivamente

$$W(u) = \frac{ke^{-ku}}{2} + \frac{k(1-c)}{2}, \quad (3.99)$$

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - \left[ \frac{k^2}{4}e^{-2ku} + \frac{k^2(2a-c)}{2}e^{-ku} + \frac{k^2(1-c)^2}{4} \right] \psi(u) = 0, \quad (3.100)$$

de donde es posible identificar una familia de potenciales y su espectro

$$V(u, a, c, k) = \frac{k^2}{4}e^{-2ku} + \frac{k^2(2a-c)}{2}e^{-ku}, \quad (3.101)$$

$$E(c, k) = -\frac{k^2(1-c)^2}{4}. \quad (3.102)$$

En este caso, por simplicidad en la elección de los parámetros  $a$  y  $c$ , sólo consideraremos la primera solución de la ecuación hipergeométrica confluyente, para la cual, el parámetro  $c$  está sujeto a la restricción

$$c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.103)$$

Por otra parte, la solución de la Ec.(3.100) se encuentra a través de

$$\psi(u) = \exp \left[ \int^u W(t) dt \right] y_1(e^{-ku}), \quad (3.104)$$

es decir,

$$\psi(u) = \exp \left[ \frac{k(1-c)}{2} u - \frac{1}{2} e^{-ku} \right] {}_1F_1 \left( a; c; e^{-ku} \right). \quad (3.105)$$

Ahora consideremos el cambio de variable

$$ku = \ln d + \beta y, \quad (3.106)$$

con  $d \neq 1$  y  $\beta$  parámetros positivos,<sup>4</sup> de tal forma que

$$e^{-2ku} = \frac{1}{d^2} e^{-2\beta y}, \quad e^{-ku} = \frac{1}{d} e^{-\beta y}, \quad \frac{d^2}{du^2} = \frac{k^2}{\beta^2} \frac{d^2}{dy^2}. \quad (3.107)$$

Por lo que la ecuación tipo Schrödinger en la variable  $y$  es

$$\frac{d^2\psi(y)}{dy^2} - V(y) \psi(y) = -E \psi(y), \quad (3.108)$$

donde<sup>5</sup>

$$\psi(y) = \exp \left[ \frac{\beta(1-c)}{2} y - \frac{1}{2d} e^{-\beta y} \right] {}_1F_1 \left( a; c; \frac{1}{d} e^{-\beta y} \right), \quad (3.109)$$

$$V(y) = \frac{\beta^2}{4d^2} e^{-2\beta y} + \frac{\beta^2(2a-c)}{2d} e^{-\beta y}, \quad (3.110)$$

$$E = -\frac{\beta^2(1-c)^2}{4}. \quad (3.111)$$

Observando los resultados anteriores, tenemos que la forma del espectro es la misma, pues el cambio de variable propuesto (Ec.(3.106)) solo intercambia  $k$  por  $\beta$ ; el cambio significativo ocurre en el potencial  $V(y)$ , pues se introdujo el nuevo parámetro  $d$ .

Deseamos obtener el potencial de Morse

$$V_0(e^{-2\beta y} - 2e^{-\beta y}), \quad (3.112)$$

a partir de  $V(y)$ , para ello, vamos a comparar las Ecs.(3.110) y (3.112). Con esto determinamos que los parámetros  $c$ ,  $d$ , deben cumplir las siguientes relaciones

$$\frac{\beta^2}{4d^2} = V_0, \quad \frac{\beta^2(2a-c)}{2d} = -2V_0. \quad (3.113)$$

De la primera ecuación, encontramos

$$\nu \equiv \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{4V_0}{\beta^2}}, \quad (3.114)$$

donde se ha considerado la raíz positiva pues  $d$  es un parámetro positivo.

<sup>4</sup>Si  $d = 1$ , tenemos el cambio trivial  $k \rightarrow \beta$  y  $u \rightarrow y$ .

<sup>5</sup>Se ha omitido la constante  $d^{(1-c)/2}$  en  $\psi(y)$ .



Considerando que

$$a = -n, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad (3.115)$$

y debido a la condición de la Ec.(3.103), tenemos que  $c$  está dado como

$$c = \nu - 2n \in \mathbf{N}, \quad (3.116)$$

por lo que los valores permitidos para  $n$  son

$$n = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(\nu - 3). \quad (3.117)$$

Sustituyendo los parámetros anteriores en las Ecs.(3.109)-(3.111), obtenemos que

$$\psi(y) = \exp \left[ \frac{\beta(2n - \nu + 1)}{2} y - \frac{\nu}{2} e^{-\beta y} \right] L_n^{\nu-2n-1}(\nu e^{-\beta y}), \quad (3.118)$$

$$V(y) = V_0 \left( e^{-2\beta y} - 2e^{-\beta y} \right), \quad (3.119)$$

$$E = -\frac{\beta^2(2n - \nu + 1)^2}{4}, \quad (3.120)$$

donde se ha usado la relación entre la función hipergeométrica confluyente y los polinomios asociados de Laguerre (Ec.(3.30))

$${}_1F_1 \left( a; c; \nu e^{-\beta y} \right) = {}_1F_1 \left( -n; \nu - 2n; \nu e^{-\beta y} \right) \propto L_n^{\nu-2n-1}(\nu e^{-\beta y}). \quad (3.121)$$

Si en la Ec.(3.116)  $\nu = 1$  ( $d = 1$ ), tenemos que  $c = 1 - 2n$ , con lo cual  ${}_1F_1(a; c; e^{-\beta y})$  no está definida para  $n \geq 1$ . Esto demuestra la importancia de haber impuesto la condición de que el parámetro  $d$  en la Ec.(3.106) fuera distinto de uno.

Usando la ecuación hipergeométrica con la adecuada función  $g(x)$ , se han resuelto los potenciales de Coulomb, Oscilador Armónico y Morse. Para cada potencial la función  $g(x)$  fue de la forma  $k^2 x^m$  con  $m \in \{-1, 0, 1\}$ . Otras formas posibles para  $g(x)$  fueron analizadas, pero el inconveniente que éstas presentaron fue la ausencia de algún término independiente de  $u$  en la ecuación tipo Schrödinger correspondiente Ec.(2.29). El caso general donde  $g(x) = k^2 x^m$ ,  $m \neq 1$  se discutirá al final de este capítulo donde se muestra la situación antes descrita.

### 3.2 Ecuación Hipergeométrica

Como se mencionó al inicio de este capítulo, el método propuesto se aplicará a la ecuación hipergeométrica [10, 13]

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0. \quad (3.122)$$

Por simplicidad en la elección de los parámetros  $a, b$  y  $c$ , sólo consideraremos la solución

$$y(x) = {}_2F_1(a, b; c; x), \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.123)$$

siendo  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  la función hipergeométrica dada por

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m x^m}{(c)_m m!}. \quad (3.124)$$

Por la Ec.(2.11) podemos identificar

$$P(x) = x(1-x), \quad Q(x) = c - Ax, \quad R(x) = -ab, \quad (3.125)$$

donde se ha definido

$$A = a + b + 1. \quad (3.126)$$

Si escribimos la función  $P(x)$  como

$$P(x) = -\frac{1}{4} [(1-2x)^2 - 1], \quad (3.127)$$

y eligiendo el signo menos en la Ec.(2.22), tenemos

$$u = \int^x \frac{-2dz}{\sqrt{-g(z)} [(1-2z)^2 - 1]}. \quad (3.128)$$

En lo que sigue, proponemos funciones  $g(x)$  que permitan resolver la integral anterior.

#### 3.2.1 Potencial de Scarf II (Caso Hiperbólico)

Para poder usar el siguiente resultado [14]

$$\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 + m^2}} = \sinh^{-1} \frac{w}{m}, \quad (3.129)$$

se propone

$$g(x) = -\frac{1}{4}k^2, \quad k > 0. \quad (3.130)$$

Usando las Ecs.(3.128)-(3.130) encontramos que

$$u = \frac{2}{k} \int^x \frac{-2dz}{\sqrt{(1-2z)^2 + i^2}} = \frac{2}{k} \sinh^{-1} \left( \frac{1-2x}{i} \right), \quad (3.131)$$

observemos que  $u$  será un número real si el argumento de  $\sinh^{-1}$  en la ecuación anterior es real.

Entonces el cambio de variable  $x = F(u)$  está dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \left( 1 - i \sinh \frac{ku}{2} \right), \quad -\infty < u < \infty. \quad (3.132)$$

A partir de la Ec.(2.20) tenemos que

$$W(u) = iD \operatorname{sech} \frac{ku}{2} + F \tanh \frac{ku}{2}, \quad (3.133)$$

con  $D$  y  $F$  parámetros definidos como

$$D = \frac{k}{4}(A - 2c), \quad F = \frac{k}{4}(A - 1). \quad (3.134)$$

Sustituyendo en la Ec.(2.29), encontramos una situación descrita por la condición de la Ec.(2.32), de donde identificamos la familia de potenciales y su correspondiente espectro, dados como

$$V(u) = \left( \frac{kF}{2} - D^2 - F^2 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{ku}{2} + iD \left( 2F - \frac{k}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \tanh \frac{ku}{2}, \quad (3.135)$$

$$E = -F^2 + \frac{1}{4}abk^2. \quad (3.136)$$

A partir de la Ec.(2.24) encontramos que

$$-I(u) = \frac{2iD}{k} \tan^{-1} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right) + \frac{2F}{k} \ln \left( \cosh \frac{ku}{2} \right), \quad (3.137)$$

donde hemos usado los resultados de las siguientes integrales [14]

$$\int \tanh v \, dv = \ln(\cosh v), \quad \int \operatorname{sech} v \, dv = \tan^{-1}(\sinh v). \quad (3.138)$$

Obsérvese que las composiciones de la Ec.(3.137) son válidas para  $-\infty < u < \infty$ , pues el dominio de  $\tan^{-1} v$  es  $\mathbf{R}$  y  $\cosh v > 0 \forall v \in \mathbf{R}$  [15].

Para determinar la solución de la ecuación tipo Schrödinger correspondiente

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - V(u)\psi(u) = -E\psi(u), \quad (3.139)$$

usamos la Ecs.(2.30), (3.123) y (3.132), obteniendo que

$$\psi(u) = \exp \left[ \frac{2iD}{k} \tan^{-1} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right) \right] \left( \cosh \frac{ku}{2} \right)^{\frac{2F}{k}} {}_2F_1 \left( a, b; c; \frac{1 - i \sinh \frac{ku}{2}}{2} \right). \quad (3.140)$$

Sustituyendo a  $D$  y  $F$  en el coeficiente del segundo término del potencial  $V(u)$  de la Ec.(3.135) tenemos que

$$iD \left( 2F - \frac{k}{2} \right) = \frac{ik^2}{8}(a + b - 2c + 1)(a + b - 1), \quad (3.141)$$

Puesto que debemos elegir a  $a$ ,  $b$  y  $c$  de manera que cancelen a  $i$ , la forma más conveniente de hacerlo es

$$a = -n, \quad b = n + s, \quad c = \frac{s + 1 - iq}{2}, \quad (3.142)$$

con  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  y  $q, s \in \mathbf{R}$ .

Notemos que la elección de  $a$  permite que la función hipergeométrica de la Ec.(3.140) sea un polinomio, mientras que la forma de  $b$  permite cancelar la dependencia de  $n$  que es introducida en la Ec.(3.141) por  $a$ , e incorpora al nuevo parámetro  $s$ . Finalmente,  $c$  elimina a la unidad imaginaria  $i$ . Entonces con  $a$ ,  $b$  y  $c$  dados por la Ec.(3.142), tenemos que  $D$  y  $F$  se escriben como

$$D = \frac{ikq}{4}, \quad F = \frac{ks}{4}. \quad (3.143)$$

Consideremos la relación entre la función hipergeométrica y los polinomios de Jacobi [11, 12]

$${}_2F_1\left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-z}{2}\right) = \frac{n!}{(\alpha + 1)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(z), \quad (3.144)$$

dado que ésta es la que más se ajusta a la situación que tenemos por la forma del parámetro  $c$ . Los polinomios ultrasféricos  $C_n^\beta(x)$  pueden ser útiles también, pero estos son un caso particular de los polinomios de Jacobi cuando  $\alpha = \beta$ .<sup>6</sup>

Para usar la relación de la Ec.(3.144), es necesario determinar  $\alpha$  y  $\beta$  cumpliendo las siguientes relaciones

$$n + s = n + \alpha + \beta + 1, \quad \frac{s + 1 - iq}{2} = \alpha + 1. \quad (3.145)$$

Resolviendo el sistema anterior, encontramos que

$$\alpha = \frac{s - 1 - iq}{2}, \quad \beta = \frac{s - 1 + iq}{2}, \quad (3.146)$$

entonces, sustituyendo en la Ec.(3.144)

$${}_2F_1\left(-n, n + s; \frac{s + 1 - iq}{2}; \frac{1 - i \sinh \frac{ku}{2}}{2}\right) \propto P_n^{(\alpha, \beta)}\left(i \sinh \frac{ku}{2}\right). \quad (3.147)$$

Finalmente, al ser sustituidos los parámetros  $D$  y  $F$  en las Ecs.(3.135), (3.136), (3.140) y considerando la relación anterior, obtenemos los siguientes resultados

$$\psi(u) = \exp\left[-\frac{q}{2} \tan^{-1}\left(\sinh \frac{ku}{2}\right)\right] \left(\cosh \frac{ku}{2}\right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(i \sinh \frac{ku}{2}\right), \quad (3.148)$$

$$V(u) = \frac{k^2}{16}(q^2 - s^2 + 2s) \operatorname{sech}^2 \frac{ku}{2} + \frac{k^2 q}{8}(1 - s) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \tanh \frac{ku}{2}, \quad (3.149)$$

$$E_n = -\frac{k^2}{16}(2n + s)^2, \quad (3.150)$$

los cuales satisfacen

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - V(u)\psi(u) = -E\psi(u). \quad (3.151)$$

De la Ec.(3.148) observamos la ventaja de haber escrito al parámetro  $b$  como  $n + s$ , pues si  $s = 0$ , tendríamos que  $|\psi(u)|^2$  es divergente cuando  $u \rightarrow \pm\infty$ , por otra parte, para que ésta sea cuadrado integrable en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , se debe tener  $s < 0$  ya que  $(\cosh \frac{ku}{2})^s \rightarrow 0$  cuando  $u \rightarrow \pm\infty$ .

---

<sup>6</sup>Ver Apéndice

### 3.2.2 Potencial de Scarf I (Caso Trigonométrico)

En este caso, deseamos utilizar el resultado de la integral [14]

$$\int \frac{dw}{\sqrt{m^2 - w^2}} = \text{sen}^{-1} \frac{w}{m}, \quad (3.152)$$

escribiendo a la función  $P(x)$  y eligiendo a  $g(x)$ , como

$$P(x) = \frac{1}{4} [1 - (1 - 2x)^2], \quad g(x) = \frac{k^2}{4}, \quad k > 0. \quad (3.153)$$

Sin embargo, el cálculo se simplifica, si en los resultados del caso hiperbólico, consideramos los siguientes cambios

$$u = -iv, \quad q = -ip, \quad p \in \mathbf{R}, \quad (3.154)$$

para ello, se van a usar las relaciones que a continuación se muestran [14, 15]

$$i \sinh^{-1} x = \text{sen}^{-1}(ix), \quad \sinh(ix) = i \text{sen } x, \quad (3.155)$$

$$\cosh(ix) = \cos x, \quad \tan^{-1}(-ix) = -i \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad -1 < x < 1. \quad (3.156)$$

Usando la Ec.(3.156), tenemos que

$$-\frac{q}{2} \tan^{-1} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right) = \frac{p}{2} \ln \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{kv}{2}}{1 - \sin \frac{kv}{2}}} = \ln \left| \tan \frac{kv}{2} + \sec \frac{kv}{2} \right|^{p/2}. \quad (3.157)$$

Para que la relación anterior sea válida, debemos tener  $-1 < \text{sen} \frac{kv}{2} < 1$ , entonces, el dominio de  $v$  es

$$-\frac{\pi}{k} < v < \frac{\pi}{k}. \quad (3.158)$$

Sustituyendo  $q = -ip$  en la Ec.(3.146) tenemos que los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  son

$$\alpha = \frac{s - p - 1}{2}, \quad \beta = \frac{s + p - 1}{2}. \quad (3.159)$$

Finalmente, realizando los cambios correspondientes en las Ecs.(3.148)-(3.150) obtenemos

$$\psi(v) = \left| \tan \frac{kv}{2} + \sec \frac{kv}{2} \right|^{p/2} \left( \cos \frac{kv}{2} \right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \text{sen} \frac{kv}{2} \right), \quad (3.160)$$

$$V(v) = \frac{k^2}{16} (s^2 - 2s + p^2) \sec^2 \frac{kv}{2} + \frac{k^2 p}{8} (1 - s) \tan \frac{kv}{2} \sec \frac{kv}{2}, \quad (3.161)$$

$$E_n = \frac{k^2}{16} (2n + s)^2. \quad (3.162)$$

### 3.2.3 Potencial de Pöschl-Teller

Al igual que con el potencial de Scarf I, podemos aplicar el método propuesto usando, en este caso [14]

$$\int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - m^2}} = \cosh^{-1} \frac{w}{m}, \quad g(x) = -\frac{k^2}{4}, \quad k > 0, \quad (3.163)$$

sin embargo, podemos utilizar los resultados obtenidos para el potencial de Scarf I junto con un cambio de variable conveniente.

A partir de las fórmulas [15]

$$\sin(\theta + i\phi) = \sin \theta \cosh \phi + i \cos \theta \sinh \phi, \quad (3.164)$$

$$\cos(\theta + i\phi) = \cos \theta \cosh \phi - i \sin \theta \sinh \phi, \quad (3.165)$$

se propone el siguiente cambio de variable

$$\frac{kv}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{iku}{2}. \quad (3.166)$$

Entonces por las Ecs.(3.164) y (3.165), tenemos que

$$\sin \frac{kv}{2} = \cosh \frac{ku}{2}, \quad \cos \frac{kv}{2} = -i \sinh \frac{ku}{2}. \quad (3.167)$$

Si consideremos el primer factor de la Ec.(3.160) encontramos

$$\left| \tan \frac{kv}{2} + \sec \frac{kv}{2} \right|^{p/2} = \left| \tanh \frac{ku}{4} \right|^{-p/2}, \quad (3.168)$$

donde se utilizó la relación [15]

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{\cosh y + 1}. \quad (3.169)$$

Por los cambios de la Ec.(3.167), los resultados del potencial de Scarf I (Ecs.(3.160)-(3.162)) se convierten en

$$\psi(u) = \left( \tanh \frac{ku}{4} \right)^{-p/2} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \cosh \frac{ku}{2} \right), \quad (3.170)$$

$$V(u) = \frac{k^2}{16} (s^2 - 2s + p^2) \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2} + \frac{k^2 p}{8} (1 - s) \operatorname{csch} \frac{ku}{2} \coth \frac{ku}{2}, \quad (3.171)$$

$$E_n = -\frac{k^2}{16} (2n + s)^2, \quad (3.172)$$

con

$$\alpha = \frac{s - p - 1}{2}, \quad \beta = \frac{s + p - 1}{2}. \quad (3.173)$$

De la relación entre la función hipergeométrica y los polinomios de Jacobi, Ec.(3.144), concluimos que

$$x = \frac{1 - \cosh \frac{ku}{2}}{2}, \quad (3.174)$$

entonces

$$u = \frac{2}{k} \cosh^{-1}(1 - 2x), \quad (3.175)$$

por lo que el dominio de  $u$  es  $(0, \infty)$ .

### 3.2.4 Potencial de Eckart

Utilicemos ahora la función  $g(x)$  dada por

$$g(x) = -\frac{k^2}{4} [(1-2x)^2 - 1], \quad k > 0, \quad (3.176)$$

y emplearemos el siguiente resultado [14]

$$\int \frac{dw}{w^2 - m^2} = -\frac{1}{m} \coth^{-1} \frac{w}{m}, \quad w^2 > m^2. \quad (3.177)$$

Sustituyendo en la Ec.(3.128), considerando que  $x < 0$  con lo cual  $(1-2x)^2 > 1$ , obtenemos

$$u = \frac{2}{k} \coth^{-1}(1-2x), \quad (3.178)$$

además, por la condición sobre  $x$ , se sigue que el dominio para  $u$  es  $(0, \infty)$ .

Entonces, el cambio de variable  $x = F(u)$  está dado por

$$F(u) = \frac{1}{2} \left( 1 - \coth \frac{ku}{2} \right), \quad (3.179)$$

y con la Ec.(2.20) encontramos que

$$W(u) = D + F \coth \frac{ku}{2}, \quad (3.180)$$

donde se han definido

$$D = \frac{k}{4}(A - 2c), \quad F = \frac{k}{4}(2 - A). \quad (3.181)$$

Aplicando el método propuesto, encontramos los siguientes resultados

$$\psi(u) = e^{Du} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right)^{2F/k} {}_2F_1 \left( a, b; c; \frac{1 - \coth \frac{ku}{2}}{2} \right), \quad (3.182)$$

$$V(u) = 2DF \coth \frac{ku}{2} + \left( F^2 - \frac{kF}{2} - \frac{abk^2}{4} \right) \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2}, \quad (3.183)$$

$$E = -D^2 - F^2. \quad (3.184)$$

Al sustituir los parámetros  $D$  y  $F$  en los coeficientes de  $V(u)$ , tenemos que

$$2DF = \frac{k^2}{8}(1-a-b)(1+a+b-2c), \quad (3.185)$$

$$F^2 - \frac{kF}{2} - \frac{abk^2}{4} = \frac{k^2}{16} [(a-b)^2 - 1]. \quad (3.186)$$

Por conveniencia, se proponen

$$a = -n, \quad b = -n, \quad c = -\frac{4n^2 + p - 1}{2(2n + 1)}, \quad p \in \mathbf{R}. \quad (3.187)$$

Debido a la forma en la que se propone a  $c$ , el potencial  $V(u)$  no depende de  $n$ , por otra parte, permite usar la relación entre la función hipergeométrica y los polinomios de Jacobi dada por la Ec.(3.144); entonces debemos determinar  $\alpha$  y  $\beta$  que cumplan

$$n + \alpha + \beta + 1 = -n, \quad \alpha + 1 = -\frac{4n^2 + p - 1}{2(2n + 1)}. \quad (3.188)$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos

$$\alpha = -\frac{(2n + 1)^2 + p}{2(2n + 1)}, \quad \beta = -\frac{(2n + 1)^2 - p}{2(2n + 1)}. \quad (3.189)$$

Con los parámetros de la Ec.(3.187), los resultados de las Ecs.(3.182)-(3.184) se convierten en

$$\psi(u) = \exp\left[\frac{kpu}{4(2n + 1)}\right] \left(\sinh \frac{ku}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\coth \frac{ku}{2}\right), \quad (3.190)$$

$$V(u) = \frac{k^2 p}{8} \coth \frac{ku}{2} - \frac{k^2}{16} \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2}, \quad (3.191)$$

$$E_n = -\frac{k^2}{16} \left[ (2n + 1)^2 + \frac{p^2}{(2n + 1)^2} \right]. \quad (3.192)$$

A partir de estas ecuaciones, podemos obtener otros potenciales mediante un cambio de variable. Alternativamente, podemos aplicar el método con una función  $g(x)$  apropiada y escribiendo a  $P(x)$  de manera conveniente. Lo primero simplifica de manera notable los cálculos, como pudo apreciarse con los potenciales de Scarf I y de Pöschl-Teller antes discutidos.

### 3.2.5 Potencial de Rosen-Morse II (Caso Hiperbólico)

Para generar este potencial desde nuestro enfoque, se usa el siguiente resultado [14]

$$\int \frac{dw}{m^2 - w^2} = \frac{1}{m} \tanh^{-1} \frac{w}{m}, \quad w^2 < m^2, \quad g(x) = k^2 P(x), \quad k > 0, \quad (3.193)$$

tomando  $0 < x < 1$ , lo cual implica que  $(1 - 2x)^2 < 1$ .

Sin embargo, al igual que con los potenciales de Scarf I y Pöschl-Teller, consideramos un cambio de variable dado por

$$\frac{ku}{2} = \frac{i\pi}{2} + \frac{kv}{2}, \quad (3.194)$$

y a partir de las siguientes fórmulas [15]

$$\sinh(\theta + \phi) = \sinh \theta \cosh \phi + \cosh \theta \sinh \phi, \quad (3.195)$$

$$\cosh(\theta + \phi) = \cosh \theta \cosh \phi + \sinh \theta \sinh \phi, \quad (3.196)$$

obtenemos

$$\sinh \frac{ku}{2} = i \cosh \frac{kv}{2}, \quad \cosh \frac{ku}{2} = i \sinh \frac{kv}{2}. \quad (3.197)$$

De la Ec.(3.179) tenemos que

$$x = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{kv}{2} \right), \quad (3.198)$$

así, el dominio para  $v$  es  $(-\infty, \infty)$ , mientras que para  $x$  es  $(0, 1)$ .



Realizando los cambios en las Ecs.(3.190)-(3.192) encontramos que

$$\psi(v) = \exp \left[ \frac{kp v}{4(2n+1)} \right] \left( \cosh \frac{kv}{2} \right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \tanh \frac{kv}{2} \right), \quad (3.199)$$

$$V(v) = \frac{k^2 p}{8} \tanh \frac{kv}{2} + \frac{k^2}{16} \operatorname{sech}^2 \frac{kv}{2}, \quad (3.200)$$

$$E_n = -\frac{k^2}{16} \left[ (2n+1)^2 + \frac{p^2}{(2n+1)^2} \right]. \quad (3.201)$$

con  $\alpha$  y  $\beta$  dados por la Ec.(3.189).

### 3.2.6 Potencial de Rosen-Morse I (Caso Trigonométrico)

Finalmente, el potencial de Rosen-Morse I lo determinamos a partir del anterior realizando los siguientes cambios

$$\frac{kv}{2} = \frac{i\pi}{2} - \frac{iku}{2}, \quad p = iq, \quad q \in \mathbf{R}, \quad (3.202)$$

entonces, usando las Ecs.(3.195)-(3.196) llegamos a

$$\sinh \frac{kv}{2} = i \cos \frac{ku}{2}, \quad \cosh \frac{kv}{2} = \operatorname{sen} \frac{ku}{2}. \quad (3.203)$$

Para obtener el dominio de  $u$ , sustituimos las relaciones anteriores en la Ec.(3.198)

$$x = \frac{1}{2} \left( 1 - i \cot \frac{ku}{2} \right), \quad (3.204)$$

dado que  $|x|$  debe ser finita, tenemos que  $0 < u < \frac{2\pi}{k}$ .

Realizando los cambios de la Ec.(3.203) en los resultados del potencial de Rosen-Morse II, tenemos que

$$\psi(u) = \exp \left[ \frac{kqu}{4(2n+1)} \right] \left( \operatorname{sen} \frac{ku}{2} \right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( i \cot \frac{ku}{2} \right), \quad (3.205)$$

$$V(u) = \frac{k^2 q}{8} \cot \frac{ku}{2} - \frac{k^2}{16} \operatorname{csc}^2 \frac{ku}{2}, \quad (3.206)$$

$$E_n = \frac{k^2}{16} \left[ (2n+1)^2 - \frac{q^2}{(2n+1)^2} \right]. \quad (3.207)$$

con

$$\alpha = -\frac{(2n+1)^2 + iq}{2(2n+1)}, \quad \beta = -\frac{(2n+1)^2 - iq}{2(2n+1)}. \quad (3.208)$$

### 3.3 Resumen de Resultados

En esta sección se resumen los resultados obtenidos con el método a partir de las ecuaciones hipergeométrica confluyente e hipergeométrica. En todos los casos el parámetro  $k$  es positivo. Estos resultados satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - V(u)\psi(u) = -E\psi(u).$$

Tabla 3.1

#### Ecuación Hipergeométrica Confluyente

$g(x)$	$W(u)$	$V(u)$	$E$	$\psi(u)$
$k^2x^{-1}$	$\frac{c}{2u} - \frac{k}{2}$	$\frac{k(2a-c)}{2u} + \frac{c(c-2)}{4u^2}$ $u > 0$	$-\frac{k^2}{4}$	$e^{-ku/2} u^{c/2} {}_1F_1(a; c; ku)$
$k^2$	$-\frac{k^2u}{4} + \frac{2c-1}{2u}$	$\frac{k^4u^2}{16} + \frac{(2c-1)(2c-3)}{4u^2}$ $-\infty < u < \infty$	$-\frac{k^2(2a-c)}{2}$	$e^{-\frac{k^2}{8}u^2}  u ^{\frac{2c-1}{2}}$ $\times {}_1F_1(a; c; k^2u^2/4)$
$k^2x$	$\frac{ke^{-ku}}{2} + \frac{k(1-c)}{2}$	$\frac{k^2}{4}e^{-2ku} + \frac{k^2(2a-c)}{2}e^{-ku}$ $u > 0$	$-\frac{k^2(1-c)^2}{4}$	$\exp\left[\frac{k(1-c)}{2}u - \frac{1}{2}e^{-ku}\right]$ $\times {}_1F_1(a; c; e^{-ku})$

Tabla 3.2

#### Ecuación Hipergeométrica Confluyente (continua)

Potencial	$g(x)$	Parámetros	$V(u)$	$E_n$	$\psi(u)$
Coulomb	$k^2x^{-1}$	$a = l - n + 1$ $c = 2(l + 1)$ $k = 1/n$	$-\frac{1}{u} + \frac{l(l+1)}{u^2}$ $u > 0$	$-\frac{1}{4n^2}$	$e^{-u/2n} u^{l+1} L_{n-l-1}^{2l+1}(u/n)$
Oscilador 1D	$k^2 = 2$	$a = -n$ $2c = 1, 3$	$\frac{u^2}{4}$ $-\infty < u < \infty$	$n + \frac{1}{2}$	$e^{-u^2/4} H_n(u/\sqrt{2})$
Oscilador 3D	$k^2 = 2$	$2a = l - n$ $2c = 2l + 3$	$\frac{u^2}{4} + \frac{l(l+1)}{u^2}$ $u > 0$	$n + \frac{3}{2}$	$e^{-u^2/4} u^{l+1}$ $\times {}_1F_1\left(\frac{l-n}{2}; \frac{2l+3}{2}; \frac{u^2}{2}\right)$
Morse	$k^2x$	$ku = -\ln \nu + \beta y$ $\nu = 2V_0^{1/2}/\beta$ $a = -n$ $c = \nu - 2n$	$V_0(e^{-2\beta y} - 2e^{-\beta y})$ $y > 0$	$-\frac{\beta^2(2n-\nu+1)^2}{4}$	$\exp\left[\frac{\beta(2n-\nu+1)y}{2} - \frac{\nu}{2}e^{-\beta y}\right]$ $\times L_n^{\nu-2n-1}(\nu e^{-\beta y})$

Tabla 3.3  
Ecuación Hipergeométrica

	$g(x) = -\frac{1}{4}k^2, \quad \int \frac{dw}{\sqrt{w^2+m^2}} = \sinh^{-1} \frac{w}{m}, \quad -\infty < u < \infty$
$W(u)$	$iD \operatorname{sech} \frac{ku}{2} + F \tanh \frac{ku}{2}, \quad 4D = k(A - 2c), \quad 4F = k(A - 1)$
$\psi(u)$	$\exp \left[ \frac{2iD}{k} \tan^{-1} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right) \right] \left( \cosh \frac{ku}{2} \right)^{\frac{2F}{k}} {}_2F_1 \left( a, b; c; \frac{1 - \sinh \frac{ku}{2}}{2} \right)$
$V(u)$	$\left( \frac{kF}{2} - D^2 - F^2 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{ku}{2} + iD \left( 2F - \frac{k}{2} \right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \tanh \frac{ku}{2}$
$E$	$-F^2 + \frac{abk^2}{4}$
<b>Scarf II (Hiperbólico)</b>	
	$a = -n, \quad b = n + s, \quad 2c = s + 1 - iq \quad -\infty < u < \infty, \quad \alpha = \frac{s-1-iq}{2}, \quad \beta = \frac{s-1+iq}{2}$
$\psi(u)$	$\exp \left[ -\frac{q}{2} \tan^{-1} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right) \right] \left( \cosh \frac{ku}{2} \right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( i \sinh \frac{ku}{2} \right)$
$V(u)$	$\frac{k^2(q^2 - s^2 + 2s)}{16} \operatorname{sech}^2 \frac{ku}{2} + \frac{k^2q(1-s)}{8} \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \tanh \frac{ku}{2}$
$E_n$	$-\frac{k^2(2n+s)^2}{16}$
<b>Scarf I (Trigonométrico)</b>	
	$u = -iv, \quad q = -ip \quad -\pi < kv < \pi, \quad \alpha = \frac{s-p-1}{2}, \quad \beta = \frac{s+p-1}{2}$
$\psi(v)$	$\left  \tan \frac{kv}{2} + \sec \frac{kv}{2} \right ^{p/2} \left( \cos \frac{kv}{2} \right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \operatorname{sen} \frac{kv}{2} \right)$
$V(v)$	$\frac{k^2(s^2 - 2s + p^2)}{16} \sec^2 \frac{kv}{2} + \frac{k^2p(1-s)}{8} \tan \frac{kv}{2} \sec \frac{kv}{2}$
$E_n$	$\frac{k^2(2n+s)^2}{16}$
<b>Pöschl-Teller</b>	
	$kv = \pi + iku, \quad u > 0, \quad \alpha = \frac{s-p-1}{2}, \quad \beta = \frac{s+p-1}{2}$
$\psi(u)$	$\left( \tanh \frac{ku}{4} \right)^{-p/2} \left( \sinh \frac{ku}{2} \right)^{s/2} P_n^{(\alpha, \beta)} \left( \cosh \frac{ku}{2} \right)$
$V(u)$	$\frac{k^2(s^2 - 2s + p^2)}{16} \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2} + \frac{k^2p(1-s)}{8} \coth \frac{ku}{2} \operatorname{csch} \frac{ku}{2}$
$E_n$	$-\frac{k^2(2n+s)^2}{16}$

Tabla 3.4

**Ecuación Hipergeométrica** (*continua*)

$g(x)$	$= -\frac{k^2}{4} [(1-2x)^2 - 1], \quad x < 0, \quad \int \frac{dw}{w^2-m^2} = -\frac{1}{m} \coth^{-1} \frac{w}{m}, \quad u > 0$
$W(u)$	$D + F \coth \frac{ku}{2}, \quad 4D = k(A-2c), \quad 4F = k(2-A)$
$\psi(u)$	$\exp(Du) \left(\sinh \frac{ku}{2}\right)^{2F/k} {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{1-\coth \frac{ku}{2}}{2}\right)$
$V(u)$	$2DF \coth \frac{ku}{2} + \left(F^2 - \frac{kF}{2} - \frac{abk^2}{4}\right) \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2}$
$E$	$-D^2 - F^2$
Eckart	
$a = -n, \quad b = -n, \quad c = -\frac{4n^2+p-1}{2(2n+1)}, \quad u > 0, \quad \alpha = -\frac{(2n+1)^2+p}{2(2n+1)}, \quad \beta = -\frac{(2n+1)^2-p}{2(2n+1)}$	
$\psi(u)$	$\exp\left[\frac{kpu}{4(2n+1)}\right] \left(\sinh \frac{ku}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\coth \frac{ku}{2}\right)$
$V(u)$	$\frac{k^2p}{8} \coth \frac{ku}{2} - \frac{k^2}{16} \operatorname{csch}^2 \frac{ku}{2}$
$E_n$	$-\frac{k^2}{16} \left[(2n+1)^2 + \frac{p^2}{(2n+1)^2}\right]$
Rosen-Morse II (Caso Hiperbólico)	
$ku = i\pi + kv, \quad -\infty < v < \infty, \quad \alpha = -\frac{(2n+1)^2+p}{2(2n+1)}, \quad \beta = -\frac{(2n+1)^2-p}{2(2n+1)}$	
$\psi(v)$	$\exp\left[\frac{kpv}{4(2n+1)}\right] \left(\cosh \frac{kv}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(\tanh \frac{kv}{2}\right)$
$V(v)$	$\frac{k^2p}{8} \tanh \frac{kv}{2} + \frac{k^2}{16} \operatorname{sech}^2 \frac{kv}{2}$
$E_n$	$-\frac{k^2}{16} \left[(2n+1)^2 + \frac{p^2}{(2n+1)^2}\right]$
Rosen-Morse I (Caso Trigonométrico)	
$kv = i\pi - iku, \quad 0 < ku < 2\pi, \quad \alpha = -\frac{(2n+1)^2+p}{2(2n+1)}, \quad \beta = -\frac{(2n+1)^2-p}{2(2n+1)}$	
$\psi(u)$	$\exp\left[\frac{kqu}{4(2n+1)}\right] \left(\sin \frac{ku}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}} P_n^{(\alpha, \beta)}\left(i \cot \frac{ku}{2}\right)$
$V(u)$	$\frac{k^2q}{8} \cot \frac{ku}{2} - \frac{k^2}{16} \operatorname{csc}^2 \frac{ku}{2}$
$E_n$	$\frac{k^2}{16} \left[(2n+1)^2 - \frac{q^2}{(2n+1)^2}\right]$

### 3.4 Discusión del Método

En esta sección mostramos mediante dos ejemplos, las dificultades que presenta el método de la sección 2.2. En el primero, tenemos que la expresión (2.31) se escribe de la forma (2.33), es decir, se carece de un término independiente de  $u$  que pueda asociarse a la energía, y en el segundo, tenemos una situación dada por la Ec.(2.32), en la que  $a_i = n$ .

Consideremos la ecuación hipergeométrica confluyente, Ec.(3.1). Una manera conveniente de proponer a la función  $g(x)$  para poder resolver la integral de la Ec.(2.22) es

$$g(x) = k^2 x^m, \quad k > 0, \quad m \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}. \quad (3.209)$$

A partir de la Ec.(2.22), eligiendo el signo más, obtenemos

$$u = \frac{\mu}{k} x^{1/\mu}, \quad \mu \equiv \frac{2}{1-m}, \quad (3.210)$$

por lo que el cambio de variable  $x = F(u)$  es

$$F(u) = \left( \frac{ku}{\mu} \right)^\mu. \quad (3.211)$$

Sustituyendo en las Ecs.(2.20), (2.29) y (2.30) obtenemos, respectivamente que

$$W(u) = \frac{A_m}{u} + B_m u^{\frac{1+m}{1-m}}, \quad (3.212)$$

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} - \left[ \frac{A_m(A_m - 1)}{u^2} + B_m \left( 2A_m + \frac{1+m}{1-m} \right) u^{\frac{2m}{1-m}} + B_m^2 u^{\frac{2(1+m)}{1-m}} + aC_m u^{\mu m} \right] \psi(u) = 0, \quad (3.213)$$

$$\psi(u) = \exp \left[ \frac{B_m(1-m)}{2} u^{\frac{2}{1-m}} \right] | u |^{A_m} {}_1F_1(a; c; (ku/\mu)^\mu). \quad (3.214)$$

donde se han definido

$$A_m = \frac{1 + (c-1)\mu}{2}, \quad B_m = -\frac{k}{2} \left( \frac{k}{\mu} \right)^{\frac{1+m}{1-m}}, \quad C_m = k^2 \left( \frac{k}{\mu} \right)^{\mu m}. \quad (3.215)$$

Con los valores  $m = -1, 0$ , obtenemos los mismos resultados que se encontraron al inicio de las secciones 3.1.1 y 3.1.2, los cuales corresponden al potencial de Coulomb y al del oscilador armónico respectivamente.

Observando la Ec.(3.213), notamos que los únicos valores de  $m$  que producen un término independiente de  $u$  en el factor de  $\psi(u)$ , son  $-1$  y  $0$ ; cualquier otro valor de  $m$  no contiene término independiente de  $u$  el cual pueda ser asociado con el espectro.

Si bien la función  $g(x)$  que se propuso, permite en principio resolver la integral de la Ec.(2.22), y el desarrollo del método es algebraicamente posible, de todas las familias de ecuaciones tipo Schrödinger que se obtuvieron, encontramos que sólo dos casos particulares para  $m$  son útiles, los demás casos para  $m \in \mathbb{Q}$  no tienen significado físico.

Lo anterior es una de las dificultades que presenta el método, la ausencia de algún término constante en la expresión  $W^2(u) + W'(u) - g(F(u))R(F(u))$ .

Finalmente, consideremos la ecuación diferencial de Hermite [10,13]

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (3.216)$$

Si proponemos

$$g(x) = k^2x^2, \quad k, x > 0, \quad (3.217)$$

con la aplicación del método, eligiendo el signo negativo en la Ec.(2.22), obtenemos la ecuación tipo Schrödinger

$$\frac{d^2\psi_n(u)}{du^2} - k^2 \left[ e^{-4ku} - (2n+1)e^{-2ku} \right] \psi_n(u) = \frac{k^2}{4}\psi_n(u), \quad (3.218)$$

cuya solución esta dada por

$$\psi_n(u) = \exp \left[ \frac{ku}{2} - \frac{1}{2}e^{-2ku} \right] H_n(e^{-ku}). \quad (3.219)$$

Nótese que en este caso, el potencial  $V(u)$  que se obtuvo es dependiente de  $n$ , aquí no podemos elegir de manera adecuada al parámetro  $k$  para eliminar esta dependencia, por lo que tenemos una situación descrita por la Ec.(2.32), para la cual  $a_i = n$ .

# Capítulo 4

## Otras Aplicaciones

### 4.1 Ecuación de Schrödinger con Masa Dependiente de la Posición

Como una última aplicación del método propuesto de la sección 2.2, con  $g(x) = 1$ , consideraremos la ecuación unidimensional de Schrödinger con masa dependiente de la posición, la cual puede escribirse de la siguiente forma [7]

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{m(x)} \frac{d}{dx} \psi(x) \right] + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (4.1)$$

o bien, después de haber desarrollado el primer término del lado izquierdo, se puede reescribir como

$$\frac{1}{2m(x)} \psi''(x) + \left[ \frac{1}{2m(x)} \right]' \psi'(x) + [E - V(x)] \psi(x) = 0. \quad (4.2)$$

En este caso la función  $\psi(x)$  no es conocida de antemano. Comparando con la Ec.(2.11) se identifica que, en este caso

$$P(x) = \frac{1}{2m(x)}, \quad Q(x) = \left[ \frac{1}{2m(x)} \right]', \quad R(x) = E - V(x), \quad (4.3)$$

donde el símbolo ' denota derivada con respecto al argumento de la función.

Al aplicar el método propuesto a la Ec.(4.2) obtenemos

$$\frac{d^2 \varphi(u)}{du^2} - [W^2(u) + W'(u) + V(F(u)) - E] \varphi(u) = 0, \quad (4.4)$$

donde

$$\varphi(u) = e^{\int^u W(t) dt} \psi(F(u)), \quad (4.5)$$

$$W(u) = \frac{Q(F(u)) - F''(u)}{2F'(u)}. \quad (4.6)$$

Se define

$$f(x) \equiv \int^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}, \quad (4.7)$$

entonces

$$F(u) = f^{-1}(u), \quad (4.8)$$

En este punto, es importante señalar, que si queremos encontrar las derivadas de  $F(u)$ , no se requiere calcular explícitamente la inversa de la función  $f(u)$ , en lugar de esto, podríamos hacer uso del teorema de la función inversa el cual dice que [14]

$$[f^{-1}(u)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(u)]}. \quad (4.9)$$

Así, por las Ecs. (4.7)-(4.9), tenemos que

$$F'(u) = \frac{d}{d(u)} f^{-1}(u) = \sqrt{P(F(u))}, \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m(F(u))}}. \quad (4.11)$$

Entonces

$$F''(u) = \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{\sqrt{2m(F(u))}} \right]. \quad (4.12)$$

Además, por la Ec.(4.3), escribimos

$$Q(F(u)) = \frac{1}{F'(u)} \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{2m(F(u))} \right]. \quad (4.13)$$

Sustituyendo en la Ec.(4.6) obtenemos

$$W(u) = m(F(u)) \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{2m(F(u))} \right] - \frac{1}{2} \sqrt{2m(F(u))} \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{\sqrt{2m(F(u))}} \right]. \quad (4.14)$$

Usando el siguiente resultado

$$\frac{d}{dx} \ln g(x) = \frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx}, \quad (4.15)$$

la Ec.(4.14) se convierte en

$$W(u) = \frac{d}{du} \ln [2m(F(u))]^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.16)$$

Haciendo el cambio de operador

$$\frac{d}{du} = \frac{dF(u)}{du} \frac{d}{dF(u)}, \quad (4.17)$$

la Ec.(4.16) se reescribe como

$$W(u) = -\frac{m'(F(u))}{2 [2m(F(u))]^{3/2}}. \quad (4.18)$$

A partir de las ecuaciones anteriores encontramos que

$$W'(u) = \frac{3 [m'(F(u))]^2 - 2m'(F(u))m''(F(u))}{16m^3(F(u))}. \quad (4.19)$$

Al sustituir en la Ec.(4.4), tenemos

$$\frac{d^2\varphi(u)}{du^2} - \left[ \frac{7 [m'(F(u))]^2 - 4m'(F(u))m''(F(u))}{32m^3(F(u))} + V(F(u)) - E \right] \varphi(u) = 0, \quad (4.20)$$

cuya solución está relacionada con las Ecs.(4.5) y (4.16), con la función  $\psi(x)$  de la siguiente manera

$$\varphi(u) = [2m(F(u))]^{-1/4} \psi(F(u)). \quad (4.21)$$

Es importante hacer notar que las dos últimas ecuaciones estan en buen acuerdo con aquellas obtenidas por B. Gönül et.al [6], las cuales fueron encontradas mediante un cambio de variable (ansatz) propuesto. Finalmente la Ec.(4.20) puede estar asociada a una ecuación cuya solución sea de antemano conocida. En la mayoría de los casos esta ecuación es otra ecuación de Schrödinger con masa constante. Dado que este punto esta fuera de los objetivos de esta Tesis no fue abordado con detalle.



## Conclusiones

En este trabajo se propuso un método con el cual, una ecuación diferencial especial es transformada a una familia de ecuaciones tipo Schrödinger. La solución de esta familia es obtenida en términos de la función especial correspondiente. Trabajando con la ecuación hipergeométrica confluyente, la adecuada selección de la función  $g(x)$  y de los parámetros involucrados, se obtuvieron los potenciales de Coulomb, oscilador armónico y Morse. Mientras que con la ecuación hipergeométrica, los potenciales de Scarf II y I, Pöschl-Teller, Eckart, Rosen-Morse II y I. Para cada potencial, sus eigenfunciones y eigenvalores se dan de manera explícita.

Se observó que es esencial la elección de la función  $g(x)$  y de los parámetros que aparecen en la ecuación tipo Schrödinger correspondiente. En el primer caso, se mostró al final del capítulo 3, que existen funciones  $g(x)$  que permiten que el álgebra involucrada en el método se pueda realizar, pero sin embargo, no existen términos independientes de la variable  $u$  que puedan asociarse al espectro  $E$ . Por ejemplo, con la ecuación hipergeométrica confluyente, se propuso la función  $g(x) = k^2 x^m$ ,  $m \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ , llegando a la conclusión de que sólo los casos  $m = -1, 0$  incluyen un término independiente de  $u$ .

Como una última aplicación del método, se transformó la ecuación de Schrödinger con masa dependiente de la posición a una ecuación de Schrödinger que eventualmente puede ser resuelta, llegando al mismo resultado que se reporta en [6].

# Apéndice

Ahora daremos una breve revisión a las propiedades más importantes de las ecuaciones hipergeométrica e hipergeométrica confluyente. También se darán las relaciones entre sus soluciones y diversas funciones especiales, entre las que destacan algunas que se han usado en éste trabajo.

## A.1 Ecuación Hipergeométrica

La ecuación hipergeométrica, la cual tiene tres puntos singulares regulares en  $x = 0, 1, \infty$  es<sup>1</sup> [10, 11, 12]

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Una propiedad importante de (A.1), es el hecho de que cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden con solamente tres puntos singulares regulares, puede expresarse por medio de un cambio de variable y en la adecuada selección de los parámetros  $a, b$  y  $c$ , en la ecuación hipergeométrica [12,13].

Las soluciones linealmente independientes de (A.1) son

$${}_2F_1(a, b; c; x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{x^m}{m!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{A.2})$$

$$x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots \quad (\text{A.3})$$

La solución (A.2) se denomina función hipergeométrica, la cual es un caso particular de las series hipergeométricas dadas por

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_m \cdots (\alpha_p)_m}{(\beta_1)_m \cdots (\beta_q)_m} \frac{z^m}{m!}, \quad (\text{A.4})$$

y éstas son una solución de la ecuación diferencial [11]

$$[\delta(\delta + \beta_1 - 1) \cdots (\delta + \beta_q - 1) - z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_p)]y = 0, \quad \delta = z \frac{d}{dz}. \quad (\text{A.5})$$

Además las series (A.4), convergen absolutamente para todo  $z$  finito si  $p \leq q$  y para  $|z| < 1$  si  $p = q + 1$ , y diverge para todo  $z \neq 0$  si  $p > q + 1$  [11,12].

Por la definición de los simbolos de Pochhammer, tenemos que, si  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$(-n)_m = 0 \quad \text{si} \quad m \geq n + 1, \quad (\text{A.6})$$

así, con  $a = -n$  la serie infinita dada por (A.2) será un polinomio de grado  $n$ .

Como se mencionó al inicio de ésta sección, existen ecuaciones diferenciales especiales que se pueden expresar como casos particulares de la ecuación hipergeométrica. A continuación se muestran éstas junto con sus soluciones escritas con la función hipergeométrica [12].

---

<sup>1</sup>También se denomina ecuación diferencial de Gauss

### Ecuación Diferencial de Jacobi

$$(1 - x^2)y''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left( -n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2} \right). \quad (\text{A.8})$$

### Ecuación Ultraesférica

$$(1 - x^2)y''(x) - (2\beta + 1)xy'(x) + n(n + 2\beta)y(x) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$C_n^\beta(x) = \frac{(n + 2\beta)!}{2^\beta n! \beta!} {}_2F_1 \left( -n, n + 2\beta + 1; 1 + \beta; \frac{1 - x}{2} \right). \quad (\text{A.10})$$

### Ecuación de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n + 1)y(x) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$P_n(x) = {}_2F_1 \left( -n, n + 1; 1; \frac{1 - x}{2} \right). \quad (\text{A.12})$$

### Ecuación asociada de Legendre

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[ n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y(x) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$P_n^m(x) = \frac{(n + m)! (1 - x^2)^{m/2}}{(n - m)! 2^m m!} {}_2F_1 \left( m - n, m + n + 1; m + 1; \frac{1 - x}{2} \right). \quad (\text{A.14})$$

### Polinomios de Chebyshev Tipo I

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + n^2y(x) = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$T_n(x) = {}_2F_1 \left( -n, n; \frac{1}{2}; \frac{1 - x}{2} \right) \quad (\text{A.16})$$

### Polinomios de Chebyshev Tipo II

$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) + n(n + 2)y(x) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$U_n(x) = (n + 1) {}_2F_1 \left( -n, n + 2; \frac{3}{2}; \frac{1 - x}{2} \right) \quad (\text{A.18})$$

O bien, algunas las funciones especiales anteriores, pueden ser expresadas en función de los polinomios de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  [12].

### Polinomios de Gegenbauer ó Ultraesféricos

$$C_n^\alpha(x) = \frac{(2\alpha)_n}{(\alpha + 1/2)_n} P_n^{(\alpha - 1/2, \alpha - 1/2)}(x). \quad (\text{A.19})$$

## Polinomios de Legendre

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x). \quad (\text{A.20})$$

## Polinomios de Chebyshev Tipo I

$$T_n(x) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x). \quad (\text{A.21})$$

## Polinomios de Chebyshev Tipo II

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,1/2)}(x). \quad (\text{A.22})$$

## Polinomios Asociados de Laguerre

$$L_n^\alpha(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} P_n^{(\alpha,\beta)} \left( 1 - \frac{2x}{\beta} \right). \quad (\text{A.23})$$

## A.2 Ecuación Hipergeométrica Confluente

Si en la Ec.(A.5) consideramos  $p = q = 1$  obtenemos

$$\left[ x \frac{d}{dx} \left( x \frac{d}{dx} + c - 1 \right) - x \left( x \frac{d}{dx} + a \right) \right] y(x) = 0, \quad (\text{A.24})$$

o bien

$$xy''(x) + (c - x)y'(x) - ay(x) = 0, \quad (\text{A.25})$$

la cual se denomina ecuación hipergeométrica confluente. Esta ecuación diferencial tiene un punto regular singular en  $x = 0$  y un punto irregular singular en  $x = \infty$ .

Las soluciones linealmente independientes de (A.25) alrededor de  $x = 0$  son

$${}_1F_1(a; c; x) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(c)_m m!}, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{A.26})$$

$$x^{1-c} {}_1F_1(a + 1 - c; 2 - c; x), \quad c \neq 2, 3, 4, \dots \quad (\text{A.27})$$

válidas para toda  $x$  finita.

La Ec.(A.25) puede obtenerse de la ecuación hipergeométrica (A.1) reemplazando  $x$  por  $x/b$ , y haciendo que  $|b| \rightarrow \infty$ , es decir

$$\lim_{|b| \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; x/b) = {}_1F_1(a; c; x), \quad (\text{A.28})$$

por lo que  ${}_1F_1(a; c; x)$  es una forma confluente de  ${}_2F_1(a, b; c; x)$ , pues  $x = \infty$  es una confluencia de las singularidades  $b$  y  $\infty$  de  ${}_2F_1(a, b; c; x/b)$  [10,11].

Los polinomios de Hermite, Laguerre y asociados de Laguerre están relacionados con la función hipergeométrica confluente como se muestra a continuación [10]

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} {}_1F_1 \left( -n; \frac{1}{2}; x^2 \right), \quad (\text{A.29})$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2(2n+1)!}{n!} x {}_1F_1 \left( -n; \frac{3}{2}; x^2 \right), \quad (\text{A.30})$$

$$L_n(x) = {}_1F_1(-n; 1; x), \quad (\text{A.31})$$

$$L_n^m = \frac{(n+m)!}{n!m!} {}_1F_1(-n; m+1; x). \quad (\text{A.32})$$

# Referencias

- [1] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, 2000.
- [2] G. Krylov, M. Robnik, *On one-dimensional Schrödinger problems allowing polynomial solutions*, J. Phys. A: Math. Gen. 33(2000) 1233-1245.
- [3] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied Semiconductor Heterostructures*, Les Editions de Physique, Les Ulis, 1988.
- [4] L.I. Serra, E. Lipparini, Europhys. Lett.40(1977) 667, F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, A.Fabrocini, Phys Rev. B50 (1994) 4284.
- [5] R. Dutt, U. Sukhatme, Jou. Phys. A25 (1992) L843-L850.
- [6] B. Gönlül, F. Üzgün, Mod. Phys. Lett. A 17(37)(2002)2453.
- [7] J. Yu, S.-H. Dong, Phys. Lett. A 325(2004) 194-198 y referencias ahí citadas.
- [8] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Second Edition, Pearson Education, EUA, 2005.
- [9] L. de la Peña, *Mecánica Cuántica*, Ediciones Universitarias, FCE, México, 1991.
- [10] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods For Physicists*, Sixth Edition, Elsevier Academic Press, EUA, 2005.
- [11] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [12] Y. Luke, *The Special Functions and Their Approximations*, Vol.1, Academic Press New York, 1969.
- [13] E. Rainville, *Ecuaciones Diferenciales Elementales*, Trillas, México, 2002.
- [14] W. Granville, P. Smith, W. Raymond, *Cálculo Diferencial e Integral*, Limusa, México, 1998.
- [15] M. Spiegel, L. Abellanas, *Fórmulas y Tablas de Matemáticas Aplicadas*, McGraw Hill, México, 1998.